

Barem de corectare

1. Se dă mulțimea de matrice

$$M = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \mid \exists k \in \mathbb{N}, k \geq 2, \text{ astfel încât } X^k = O_2\}.$$

a. Demonstrați că dacă $A \in M$, atunci $\det(I_2 + A + A^2 + \dots + A^{2015}) = 1$.

b. Demonstrați că matricea I_2 nu se poate scrie ca sumă finită de matrice din M .

Barem de corectare.

a. (4 p) $X^k = O_2 \Rightarrow \det(X) = 0 \Rightarrow X^2 = tX$, unde $t = \operatorname{tr}(X)$ (1 punct); $X^k = t^{k-1}X = O_2 \Rightarrow X = O_2$ sau $t = 0$; în anele cazuri, avem $X^2 = O_2$ (1 punct); verificare pentru $A = O_2$ (1 punct); pentru $A \neq O_2$, avem $\det(I_2 + A + A^2 + \dots + A^{2015}) = \det(I_2 + A) = 1$ (1 punct).

b. (3 p) Reducere la absurd: dacă $I_2 = A_1 + A_2 + \dots + A_n$, ar trebui ca $\operatorname{tr}(I_2) = \operatorname{tr}(A_1 + A_2 + \dots + A_n) \Leftrightarrow 2 = 0$, contradicție.

2. a. Demonstrați că, oricare ar fi ordinea factorilor, produsul tuturor permutărilor din S_3 nu poate fi egal cu permutarea identică din S_3 .

b. Demonstrați că există o infinitate de perechi de matrice (X, Y) din $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$, cu proprietatea că $XY \neq YX$ și $X^2 = Y^2 = I_2$.

Barem de corectare.

a. (3 p) Scrierea tuturor permutărilor din S_3 (1 punct); calcularea numărului total de inversiuni ale acestora și concluzia că, oricare ar fi ordinea factorilor, produsul tuturor permutărilor din S_3 este o permutare impară (1 punct); permutarea identică este pară (1 punct).

b. (4 p) $X^2 = \operatorname{tr}(X) \cdot X - \det(X) \cdot I_2$ (1 punct); căutarea unor matrice cu urma egală cu 0 și determinatul egal cu -1 (1 punct); finalizare $A = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-a & -a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b & 1-b \\ 1-b & -b \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \neq b$ (1 punct); verificarea că $AB \neq BA$ (1 punct). Pentru găsirea unor matrice particulare care să verifice condițiile problemei, se va acorda 1 punct.

3. Se consideră șirul $(x_n)_{n \geq 1}$, definit recurent astfel:

$$x_1 = 1 \text{ și } x_{n+1} = x_n + \frac{1}{ax_n^{a-1}},$$

unde $a \in \mathbb{N} - \{0\}$.

a. Demonstrați că șirul are limită și calculați această limită.

b. Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$.

c. Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^a}{n}$.

Barem de corectare.

a. (3 p) Șirul este cu termeni pozitivi prin definiție (1 punct) și $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{ax_n^{a-1}} > 0$, $\forall n \in \mathbb{N} - \{0\}$, deci este strict crescător; prin urmare are limită (1 punct); limita este ∞ (1 punct).

b. (2 p) $\frac{x_{n+1}}{x_n} = 1 + \frac{1}{ax_n^a}$ (1 punct); limita este 1 (1 punct).

c. (2 p) Conform teoremei Cesaro-Stolz, este suficient să calculăm $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1}^a - x_n^a) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} - x_n)(x_{n+1}^{a-1} + x_{n+1}^{a-2}x_n + \dots + x_n^{a-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(x_{n+1} - x_n)(x_{n+1}^{a-1} + x_{n+1}^{a-2}x_n + \dots + x_n^{a-1})}{ax_n^{a-1}} = \frac{1}{a} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{x_{n+1}}{x_n} \right)^{a-1} + \left(\frac{x_{n+1}}{x_n} \right)^{a-2} + \dots + 1 \right) = 1$.

4. Se dau numerele $a, b, c \in [0, \infty)$, astfel încât $a + b + c = 3$. Determinați valorile extreme ale expresiei

$$2(a^2 + b^2 + c^2) + 3abc.$$

Barem de corectare.

Demonstrăm că $9 \leq 2(a^2 + b^2 + c^2) + 3abc \leq 18$, cu egalitate la stânga pentru $a = b = c = 1$, iar la dreapta pentru $a = 3, b = c = 0$, sau $b = 3, a = c = 0$, sau $c = 3, a = b = 0$.

Inegalitatea din dreapta se scrie $2(a + b + c)^2 - 4(ab + bc + ca) + 3abc \leq 18 \Leftrightarrow 3abc \leq 4(ab + bc + ca)$, inegalitate adevărată, deoarece $a, b, c \in [0, 3]$ și $3abc = abc + abc + abc \leq 3ab + 3bc + 3ac \leq 4(ab + bc + ca)$ (3 puncte). Egalitatea are loc pentru $ab + bc + ca = 0$, deci $a = b = 0$, sau $b = c = 0$, sau $c = a = 0$, cazul $a = b = c = 0$ fiind exclus de condiția din enunț (1 punct).

Inegalitatea din stânga se scrie $2(a + b + c)^2 - 4(ab + bc + ca) + 3abc \geq 9 \Leftrightarrow 4(ab + bc + ca) - 3abc \leq 9$. Pentru a demonstra aceasta, presupunem că $a \leq b \leq c$; în acest caz, rezultă $a \leq 1$ și inegalitatea de demonstrat devine $4a(b + c) + 4bc - 3abc \leq 9 \Leftrightarrow 4a(3 - a) + bc(4 - 3a) \leq 9$. Deoarece $4 - 3a \geq 0$, avem $bc(4 - 3a) \leq \frac{(b+c)^2(4-3a)}{4} = \frac{(3-a)^2(4-3a)}{4}$, iar inegalitatea de demonstrat devine $4a(3 - a) + \frac{(3-a)^2(4-3a)}{4} \leq 9$, echivalentă, după câteva calcule, cu $3a(a - 1)^2 \geq 0$ (2 puncte). Egalitatea are loc pentru $a = b = c = 1$ (1 punct).