

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală

11 februarie 2023

Clasa a IX-a

1. a) Arătați că $[a] + \left[a + \frac{1}{2}\right] = [2a]$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a .

b) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\left[\frac{2x-1}{12}\right] + \left[\frac{2x+5}{12}\right] + \left[\frac{x+1}{3}\right] = \frac{3x+1}{2}$.
Adrian Bud

2. Fie ABCD un patrulater și punctele M, N, P, Q astfel încât $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{NC}$, $\overrightarrow{DP} = \overrightarrow{PC}$, $\overrightarrow{DQ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DA}$.

a) Demonstrați că $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MQ} = \frac{3}{4}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$.

b) Arătați că dreapta MP trece prin mijlocul segmentului NQ.

(***)

3. Fie $p \in \mathbb{N}$. Stabiliți valoarea de adevăr a propoziției

„Există $q \in \mathbb{N}$ astfel încât $(p + \sqrt{p^2 + 2021})^2 = \sqrt{q^2 + q}$.”

Mihaela Berindeanu, Gazeta Matematică 10/2021

4. Fie $x, y, z \in [2, \infty)$. Demonstrați că

$$\frac{x^6 + y^6}{x^4 + y^4} + \frac{y^6 + z^6}{y^4 + z^4} + \frac{z^6 + x^6}{z^4 + x^4} \geq 2(x + y + z).$$

Cătălin Cristea

Notă:

*Toate subiectele sunt obligatorii.**Fiecare problemă se va nota cu puncte între 0 și 7**Timp de lucru: 3 ore*