



Olimpiada Națională de Matematică
Etapă locală - 22 februarie 2019

Clasa a VIII-a - barem

1. Prin înmulțirea ecuației cu $\sqrt{x^2 + 2019} + x \neq 0$ se obține ecuația echivalentă: 3 p
 $2019 = \sqrt{x^2 + 2019} \Rightarrow x^2 = 2019 \cdot 2018$ 3 p
 Soluția $x = \pm\sqrt{2019 \cdot 2018}$ 1 p
2. a). $[\sqrt{n^2 + 5n + 6}] = n + 2 \Leftrightarrow n + 2 \leq \sqrt{n^2 + 5n + 6} < n + 3$ 2p
 Prin ridicare la pătrat, obținem echivalența $4n + 4 \leq 5n + 6 < 6n + 9$,
 inegalitate adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}$. 1p
 b). Prima zecimală după virgulă a numărului este mai mică decât 5 $\Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \{\sqrt{n^2 + 5n + 6}\} = \sqrt{n^2 + 5n + 6} - (n + 2) < 0,5 \Leftrightarrow$ 2 p
 $\Leftrightarrow \sqrt{n^2 + 5n + 6} < n + 2,5 \Leftrightarrow 5n + 6 < 5n + 6,25$ adevărat pentru orice 2 p
 $n \in \mathbb{N}$.
3. a). $[MN], [NP], [PM]$ linii mijlocii în triunghiurile VAB, VBC respectiv VCA
 $\Rightarrow MN = NP = PM = \frac{l}{2} = 3 \text{ cm}$ (1)
 $[OM], [ON], [OP]$ mediane în triunghiurile dreptunghice VOA, VOB respectiv
 VOC
 $\Rightarrow OM = ON = OP = \frac{l}{2} = 3 \text{ cm}$ (2) 1 p
 Din (1) și (2) $\Rightarrow MNPO$ tetraedru regulat. 1 p
 $d(P, (MNO)) = d(O, (MNP)) = OO'$ unde O' este centrul bazei MNP
 $OO' = \frac{VO}{2} = \sqrt{6} \text{ cm}$ 1 p
 b). Notăm C' mijlocul lui $[AB]$ și A' mijlocul lui $[BC]$
 $PO, VC' \subset (VCC')$ și $VC' \subset (VAB) \Rightarrow PO \cap (VAB) = PO \cap VC' = \{X\}$
 Analog $MO \cap (VBC) = MO \cap VA' = \{Y\}$ 2 p
 $\Delta OXC' \equiv \Delta OA'Y$ [U.L.U]
 $\frac{XC'}{XV} = \frac{YA'}{YV} = \frac{1}{2} \Rightarrow XY \parallel C'A'$ (reciproca teoremei lui Thales în triunghiul VXY).
 Cum $C'A' \subset (ABC) \Rightarrow XY \parallel (ABC)$ 2 p
 {Din teorema Menelaos în triunghiul VCC' cu secanta PO și în triunghiul
 VAA' cu secanta MO se obține $\frac{XC'}{XV} = \frac{YA'}{YV} = \frac{1}{2} \Rightarrow XY \parallel C'A'$ (reciproca teoremei
 lui Thales în triunghiul VXY). Cum $C'A' \subset (ABC) \Rightarrow XY \parallel (ABC)$.} {2p}
4. Fie O centrul bazei $ABCD$ și $OM \perp BD', M \in (BD')$
 $ABCD$ pătrat $\Rightarrow AC \perp BD$, dar $AC \perp DD' \Rightarrow AC \perp (BDD') \Rightarrow AC \perp OM$. Cum OM
 este perpendiculara comună a dreptelor AC și $BD' \Rightarrow d(AC, BD') = OM$ 3 p
 Din asemănarea triunghiurilor BOM și $BD'D \Rightarrow OM = \frac{a \cdot h}{\sqrt{2(h^2 + 2a^2)}}$ unde $h = DD'$ 2 p
 $\frac{a \cdot h}{\sqrt{2(h^2 + 2a^2)}} = \frac{a\sqrt{6}}{6} \Rightarrow h = a \Rightarrow ABCDA'B'C'D'$ cub 2 p

NOTĂ

- Orice soluție corectă se punctează corespunzător.