



**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
9 FEBRUARIE 2013**

CLASA a IX - a

1. a) Fie n un număr natural, $n \geq 2$. Să se calculeze:

$$f = \left\{ n + \sqrt{n^2 - 1} \right\} + \left\{ \frac{1}{n + \sqrt{n^2 - 1}} \right\},$$

unde $\{x\}$ este partea fracționară a numărului real x .

- b) Fie $a, b, c \in \mathbb{R} - \{0\}$. Să se arate că:

$$(|a| + |b|) \left(\frac{1}{|a|} + \frac{1}{|b|} \right) + (|a| + |c|) \left(\frac{1}{|a|} + \frac{1}{|c|} \right) + (|c| + |b|) \left(\frac{1}{|c|} + \frac{1}{|b|} \right) \geq 12.$$

2. Să se demonstreze că oricare triunghi echilateral poate fi partiționat în $3n + 1$ triunghiuri echilaterale, $\forall n \in \mathbb{N}$.
3. Determinați numărul $n \in \mathbb{N}$, știind că numărul $4^{2013} - 15 \cdot 4^{2010} + 2^n$ este pătrat perfect.
4. În triunghiul ABC , fie P, Q și R punctele de contact ale cercului înscris cu laturile BC, AC și respectiv AB .
- a) Arătați că AP, BQ și CR sunt concurente.
- b) Arătați că dacă $x, y, z \in \mathbb{R}$ astfel încât $x \cdot \overrightarrow{BC} + y \cdot \overrightarrow{CA} + z \cdot \overrightarrow{AB} = \vec{0}$ atunci $x = y = z$.
- c) Arătați că dacă $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{CR} = \vec{0}$, atunci triunghiul ABC este echilateral.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii
Timp de lucru: 3 ore