

**BAREM DE CORECTARE SI NOTARE****Clasa a IX a - Matematică-informatică****Olimpiada de matematică - Faza locală 17.02.2020**

- Nu se acordă puncte din oficiu.
- Pentru orice soluție corectă, diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Fiecare exercițiu este punctat de la 0 la 7.

Subiectul I.

- a) $S = 2+1+2^2+1+\dots+2^9+1 = (2+2^2+\dots+2^9) + (1+1+\dots+1) =$
 $\frac{2(2^9-1)}{2-1} + 9 = 1031 \dots\dots\dots 3 \text{ p}$
- b) Este o progresie aritmetica cu ratia 4 si cu 10 termeni2p

Subiectul II.

- Etapă de verificare pentru $n=0 \ 38 \div 19$ sau
 $n=1 \ 5^3 \cdot 2^3 + 3^3 \cdot 2^3 = 2^3(125+27)=8 \cdot 152=8 \cdot 8 \cdot 19 \div 19 \dots\dots\dots 2\text{p}$
- Etapă de demonstrație5p
- $P(n) \Rightarrow P(n+1)$
 $(5^{2n+1} \cdot 2^{n+2} + 3^{n+2} \cdot 2^{2n+1}) = 19l, 5^{2n+1} \cdot 2^{n+2} = 19l - 3^{n+2} \cdot 2^{2n+1}$
 $5^{2(n+1)+1} \cdot 2^{(n+1)+2} + 3^{(n+1)+2} \cdot 2^{2(n+1)+1} = 5^{2n+1} \cdot 2^{n+2} \cdot 5^2 \cdot 2^1 + 3^{n+2} \cdot 2^{2n+1} \cdot 3 \cdot 2^2 =$
 $(19l - 3^{n+2} \cdot 2^{2n+1}) \cdot 50 + 3^{n+2} \cdot 2^{2n+1} \cdot 12 = 19l \cdot 50 - 38 \cdot 3^{n+2} \cdot 2^{2n+1} = 19(50 - 2 \cdot 3^{n+2} \cdot 2^{2n+1})$

Subiectul III.

- a) Din $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$ obținem $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MC}$, de unde $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \dots\dots\dots 3\text{p}$
- b) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \dots\dots\dots 1\text{p}$
- $2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AD} \dots\dots\dots 2 \text{ p}$
- $|3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AD}| = \sqrt{(3 \cdot 4)^2 + (4 \cdot 3)^2} = 12\sqrt{2} \dots\dots\dots 1\text{p}$

Subiectul IV.

- a) Calcul direct $q(4,3) = \frac{7}{13} \dots\dots\dots 1 \text{ p}$

- b) Din $|x| < 1, |y| < 1$; avem $-1 < x < 1; -1 < y < 1$ si $1 + xy > 0$;

$$\frac{x+y}{1+xy} \in (-1;1); -1 < \frac{x+y}{1+xy} < 1;$$

Avem de demonstrat ca $\frac{x+y}{1+xy} > -1$ si $\frac{x+y}{1+xy} < 1 \dots\dots\dots 1 \text{ p}$

Cum $1+xy > 0$ avem $x+y > -1-xy$, $x+y+1+xy > 0$,

$(x+1)(1+y) > 0$ adevarat deoarece $x > -1, y > -1 \dots\dots\dots 1 \text{ p}$

$x+y < 1+xy$, $x+y-1-xy < 0$,

$(x-1)(1-y) < 0$ adevarat deoarece $x < 1, y < 1 \dots\dots\dots 1 \text{ p}$



c) $-1 < \frac{x+y}{1+xy} < 1$ avem $\frac{x+y}{1+xy} > -1$ și $\frac{x+y}{1+xy} < 1$

$$\frac{x+y}{1+xy} + 1 > 0, \quad \frac{x+y+1+xy}{1+xy} > 0, \quad \frac{(x+1)(y+1)}{1+xy} > 0$$

$$\frac{x+y}{1+xy} - 1 < 0, \quad \frac{x+y-1-xy}{1+xy} < 0, \quad \frac{(x-1)(1-y)}{1+xy} < 0$$

Dacă $1 + xy > 0$ atunci propoziția este adevărată..... 1 p

Dacă $1 + xy < 0$, atunci propoziția este falsă

(exemplu $x = 2, y = -3$ atunci $\frac{x+y}{1+xy} = \frac{2-3}{1-6} = \frac{1}{5} \in (-1,1)$)2 p