

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
30 IANUARIE 2015
CLASA a VII-a**

Subiectul 1.

- a. Aduceți numărul rațional $\frac{2+4+6+\dots+2k}{1+3+5+\dots+(2k-1)}$ la forma ireductibilă.
- b. Arătați că $\sqrt{\frac{2}{1} \cdot \frac{2+4}{1+3} \cdot \frac{2+4+6}{1+3+5} \cdot \dots \cdot \frac{2+4+6+\dots+2016}{1+3+5+\dots+2015}}$ este număr irațional.

Subiectul 2. Numerele a și b sunt raționale pozitive și $a < b$.

- a. Să se demonstreze că $\frac{1}{b} < \frac{1}{\sqrt{ab}} < \frac{1}{a}$.
- b. Să se arate că $\frac{2}{3} < (\sqrt{6})^{-1} + (\sqrt{15})^{-1} + (\sqrt{35})^{-1} < \frac{16}{15}$.

Subiectul 3. Fie un paralelogram $ABCD$ și punctele: $Q \in (AB \setminus [AB])$ astfel încât

$$\frac{BQ}{AQ} = \frac{2}{3}, M \in (DA \setminus [AD]) \text{ astfel încât } \frac{AM}{AD} = 1, \text{ iar } \{P\} = DB \cap MQ.$$

- a. Arătați că $APQD$ este trapez.
- b. Dacă aria triunghiului MDQ este 24 cm^2 , aflați aria paralelogramului $ABCD$.

Subiectul 4. Se îndoaie o foaie de hârtie. Prin două puncte, A și B , ale muchiei de pliere se fac, cu foarfeca, două tăieturi drepte AC și BC . Se scoate bucata de hârtie cu contur triunghiul ABC . Desfăcând foaia de hârtie apare un spațiu liber, delimitat de un poligon. Determinați condiții asupra triunghiului ABC astfel încât poligonul să fie:

- | | | |
|-----------------------------------|-----------|-----------|
| a. triunghi | b. romb | c. pătrat |
| d. dreptunghi care nu este pătrat | e. trapez | |

**Notă: Toate subiectele sunt obligatorii
Timp de lucru: 3 ore**

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
30 IANUARIE 2015

CLASA a VII-a
Bareme

Subiectul 1.

a.	$\frac{2+4+6+\dots+2k}{1+3+5+\dots+(2k-1)} = \frac{2 \cdot \frac{k(k+1)}{2}}{k^2} = \frac{k+1}{k}$ k și $k+1$ sunt consecutive, deci prime între ele. Frația este ireductibilă	3p
b.	$\sqrt[3]{\frac{2}{1} \cdot \frac{2+4}{1+3} \cdot \frac{2+4+6}{1+3+5} \cdot \dots \cdot \frac{2+4+6+\dots+2016}{1+3+5+\dots+2015}} = \sqrt[3]{\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \dots \cdot \frac{1014}{1013}} =$ $= \sqrt[3]{1014}$ număr ireductibil (demonstrarea faptului că 1014 nu este p.p.)	3p 1p

Subiectul 2.

a.	$0 < a < b \wedge (a > 0) \Rightarrow 0 < a^2 < ab \Rightarrow 0 < a < \sqrt{ab} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{ab}} < \frac{1}{a}$ $0 < a < b \wedge (b > 0) \Rightarrow 0 < ab < b^2 \Rightarrow 0 < \sqrt{ab} < b \Rightarrow \frac{1}{b} < \frac{1}{\sqrt{ab}}$	3p
b.	Aplicăm relația de la punctul a. : $\frac{1}{3} < \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 3}} < \frac{1}{2}, \frac{1}{5} < \frac{1}{\sqrt{3 \cdot 5}} < \frac{1}{3}, \frac{1}{7} < \frac{1}{\sqrt{5 \cdot 7}} < \frac{1}{5}$ Adunând inegalitățile obținem: $\frac{2}{3} < \frac{71}{105} < (\sqrt{6})^{-1} + (\sqrt{15})^{-1} + (\sqrt{35})^{-1} < \frac{31}{30} < \frac{16}{15}$	4p

Subiectul 3.

a.	QA mediană, iar B este situat la $\frac{2}{3}$ de vârf, deci B este centrul de greutate al triunghiului QDM DP este deci mediană, P mijlocul MQ AP linie mijlocie în triunghiul MQD $\Rightarrow AP \parallel QD$, trapez	3p
b.	DP mediană în triunghiul MDQ $\Rightarrow$ aria triunghiului MDP este 12 cm^2 PA mediană în triunghiul MDP $\Rightarrow$ aria triunghiului ADP este 6 cm^2 $DB = \frac{2}{3} DP \Rightarrow$ aria triunghiului ABD este $\frac{2}{3}$ din aria triunghiului ADP, deci 4 cm^2 Aria paralelogramului ABCD este 8 cm^2.	4p

Subiectul 4.

	Fie D simetricul punctului C față de AB (după desfacerea hârtiei) Triunghiurile ACB și ADB sunt simetrice față de AB și împreună formează conturul spațiului liber din hârtie. $\Rightarrow CA=AD$ și $CB=BD$	2p
a.	Spațiul liber este un triunghi dacă punctele C, A, D sau C, B, D sunt coliniare, deci dacă $CA \perp AB$ sau $CB \perp AB$	1p
b.	Se obține romb dacă $CA=CB$, adică triunghiul ABC este isoscel (justificare)	1p
c.	Se obține pătrat dacă triunghiul ABC este dreptunghic isoscel (justificare)	1p
d.	Patrulaterul ACBD are diagonalele perpendiculare deci nu se poate obține dreptunghi care să nu fie pătrat	1p
e.	Dacă $AC \parallel BD \Rightarrow \sphericalangle CAB \equiv \sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle CBA$ deci triunghiul ABC este isoscel și obțin romb. La fel dacă $BC \parallel AD$, deci nu se poate obține trapez.	1p.