

**BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE
OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ**

Clasa a X-a M₁

Faza locală

17 februarie 2018

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acorda punctajul corespunzător.
- Nu se acorda fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

Subiectul 1.(7p)

a) Radicând la pătrat obținem $(\sqrt{ac} + \sqrt{bd})^2 \leq (\sqrt{(a+b)(c+d)})^2$
 $ac + 2\sqrt{acbd} + bd \leq ac + bc + ad + bd$; $bc - 2\sqrt{acbd} + ad \geq 0$;
 $(\sqrt{bc} - \sqrt{ad})^2 \geq 0$; adevărat $(\forall) a, b, c, d \in \mathbb{R}_+$ 2p

b) Aplicând punctul a pentru $c = \log_{a+b} \sqrt{2a}$ și $d = \log_{a+b} \sqrt{2b}$ obținem

$$\sqrt{a \log_{a+b} \sqrt{2a}} + \sqrt{b \log_{a+b} \sqrt{2b}} \leq \sqrt{(a+b)(\log_{a+b} \sqrt{2a} + \log_{a+b} \sqrt{2b})} \dots\dots\dots 2p$$

$$\log_{a+b} \sqrt{2a} + \log_{a+b} \sqrt{2b} = \log_{a+b} 2\sqrt{ab}; m_g \leq m_a; \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

$$\log_{a+b} 2\sqrt{ab} \leq \log_{a+b} 2 \cdot \frac{a+b}{2} = \log_{a+b} (a+b) = 1 \dots\dots\dots 2p$$

$$\sqrt{a \log_{a+b} \sqrt{2a}} + \sqrt{b \log_{a+b} \sqrt{2b}} \leq \sqrt{a+b} \dots\dots\dots 1p$$

Subiectul 2.(7p)

a) f injectivă $(\forall) z_1, z_2 \in C, f(z_1) = f(z_2) \rightarrow z_1 = z_2 \dots\dots\dots 1p$

f surjectivă $(\forall) y = m + ni \in C, (\exists) z = a + bi$ a.i. $y = f(z)$ de unde $a = m$ și $b = \frac{n}{7}$ deci

$$z = m + \frac{n}{7}i = \frac{7m + ni}{7} \dots\dots\dots 1p$$

f bijectivă, deci inversabilă $f^{-1}(y) = \frac{4y + 3\bar{y}}{7} \dots\dots\dots 1p$

b) $f_2 = f \circ f(z) = 4(4z - 3\bar{z}) - 3(4\bar{z} - 3z) = 25z - 24\bar{z} = \frac{7^2 + 1}{2}z - \frac{7^2 - 1}{2}\bar{z}$

$$f_3(z) = f_2 \circ f(z) = 25(4z - 3\bar{z}) - 24(4\bar{z} - 3z) = 172z - 171\bar{z} = \frac{7^3 + 1}{2}z - \frac{7^3 - 1}{2}\bar{z} \dots\dots\dots 2p$$



Inductiamatematica $f_n(z) = \frac{7^n + 1}{2}z - \frac{7^n - 1}{2}\bar{z}$ 2p

Subiectul 3.(7p)

a) Fie $\frac{z_1}{z_2 + z_3} = a + bi$ Din $|z_1 + z_2 + z_3| = |z_2 + z_3|$ obținem

$$\left| (z_2 + z_3) \left(\frac{z_1}{z_2 + z_3} + 1 \right) \right| = |z_2 + z_3|; (a+1)^2 + b^2 = 1 \dots\dots\dots 2p$$

Din $|z_2 + z_3| = |z_1|$ obținem $a^2 + b^2 = 1$ 2p

Prin rezolvarea sistemului $\begin{cases} (a+1)^2 + b^2 = 1 \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases}$ obținem $a = -\frac{1}{2}$, $b = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ 2 p

Deci valoarea raportului poate fi $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ sau $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ 1p

Subiectul 4.(7p)

Folosind proprietatile radicalilor obținem succesiv

$$\sqrt[3]{\sqrt{x^3}} - \sqrt[7]{\sqrt{x^2x}\sqrt{x}} = 6\sqrt[12]{\sqrt{x^2x}} \dots\dots\dots 1p$$

$$\sqrt[6]{x^3} - \sqrt[7]{\sqrt{\sqrt{x^6x}}} = 6\sqrt[24]{x^3} \dots\dots\dots 1p$$

$$\sqrt{x} - \sqrt[4]{x} = 6\sqrt[8]{x} \dots\dots\dots 1p$$

Notăm $\sqrt[8]{x} = t$, ecuația devine $t^4 - t^2 = 6t$1p

$$t(t^3 - t - 6) = 0$$

$t_1 = 0$, de unde $x_1 = 0$1p

$$t^3 - t - 6 = 0, (t-2)(t^2 + 2t + 3) = 0$$

$t-2=0$, $t_2=0$, $x_2=2^8$, $x_2=256$ 1p

$t^2 + 2t + 3 = 0$, $\Delta = -8 < 0$ nu are soluții reale

Soluțiile reale sunt 0 și 256.....1p