

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 15 FEBRUARIE 2015

Clasa a IX-a

Problema 1. Se consideră o mulțime $G \subset \mathbb{R}$ care satisface simultan proprietățile:

- a) $1 \in G$;
 - b) $x \in G \Rightarrow \sqrt{x+2} \in G$;
 - c) $\sqrt{x+3} \in G \Rightarrow x+4 \in G$;
- Arătați că $\mathbb{N}^* \subset G$.

Lucian Dragomir, Gazeta Matematică nr. 12/2014

Soluție și barem de corectare

$1 \in G \Leftrightarrow \sqrt{-2+3} \in G \Rightarrow -2+4 \in G$, adică $2 \in G$ (1p)

Pentru orice $x \in G$ avem: $x \in G \Rightarrow \sqrt{x+2} \in G \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)+3} \in G \Rightarrow (x-1)+4 \in G \Leftrightarrow x+3 \in G$ (2p)

Atunci $1 \in G \Rightarrow 4 \in G \Rightarrow 7 \in G$, de unde $\sqrt{7+2} \in G$, adică $3 \in G$ (1p)

Folosind o variantă a principiului inducției matematice, rezultă $\mathbb{N}^* \subset G$ (3p)

Problema 2. Determinați termenul general al șirului $(x_n)_{n \geq 1}$ definit prin:

$$x_1 = 1, x_2 = 2 \text{ și } x_{n+2} = \frac{x_{n+1}^2}{\sqrt{x_n^2 + x_{n+1}}} - \frac{1}{n}, n \geq 1.$$

Marius Perianu, Slatina

Soluție și barem de corectare

$x_3 = 3$ (1p)

Vom demonstra prin inducție matematică propoziția $P(n): a_n = n$, pentru orice $n \geq 1$ (1p)

$P(1), P(2)$ sunt adevărate (1p)

$\left[\sqrt{k^2 + k + 1} \right] = k$ (2p)

$x_{k+2} = k + 2$, deci $P(k+2)$ este adevărată; ca urmare $a_n = n$, pentru orice $n \geq 1$ (2p)

Problema 3. Fie $ABCD$ un patrulater înscris într-un cerc de centru O . Notăm cu H_1, H_2, H_3, H_4 ortocentrele triunghiurilor ABC, BCD, CDA , respectiv DAB și cu M, N mijloacele diagonalelor $[AC]$, respectiv $[BD]$.

- a) Arătați că segmentele $[DH_1], [AH_2], [BH_3]$ și $[CH_4]$ au același mijloc P .
- b) Arătați că punctele O, P și mijlocul segmentului $[MN]$ sunt coliniare.
- c) Arătați că dacă triunghiurile MH_1H_3 și NH_2H_4 au același centru de greutate, atunci patrulaterul $ABCD$ este dreptunghi.

[***]

Soluție și barem de corectare

a) $\overrightarrow{H_1H_2} = (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) - (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AD}$ (2p)

ADH_2H_1, ABH_2H_3 și BCH_3H_4 sunt paralelograme, ceea ce justifică afirmația din enunț (1p)

- b) Fie Q mijlocul lui $[MN]$; avem $\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}) = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OH_1} + \overrightarrow{OD}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{OP}$,
deci O, Q și P sunt coliniare (2p)
- c) MH_1H_3 și NH_2H_4 au același centru de greutate dacă $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OH_1} + \overrightarrow{OH_3} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OH_2} + \overrightarrow{OH_4}$ (1p)
- De aici se obține $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$, de unde $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, adică $ABCD$ este paralelogram și, fiind
inscriptibil, paralelogramul $ABCD$ este dreptunghi (1p)

Problema 4. Arătați că pentru orice numere reale $a, b, c > 0$ are loc inegalitatea:

$$\frac{a^3 - ab\sqrt{ab}}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b^3 - bc\sqrt{bc}}{b^2 + bc + c^2} + \frac{c^3 - ca\sqrt{ca}}{c^2 + ca + a^2} \geq 0.$$

Costel Anghel, Negreni, Olt

Inegalitatea din enunț se scrie echivalent

$$\frac{a^3}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b^3}{b^2 + bc + c^2} + \frac{c^3}{c^2 + ca + a^2} \geq \frac{ab\sqrt{ab}}{a^2 + ab + b^2} + \frac{bc\sqrt{bc}}{b^2 + bc + c^2} + \frac{ca\sqrt{ca}}{c^2 + ca + a^2} \quad (*)$$

Avem $\frac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b^3 - c^3}{b^2 + bc + c^2} + \frac{c^3 - a^3}{c^2 + ca + a^2} = 0$ (2p)

deci $\frac{a^3}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b^3}{b^2 + bc + c^2} + \frac{c^3}{c^2 + ca + a^2} = \frac{b^3}{a^2 + ab + b^2} + \frac{c^3}{b^2 + bc + c^2} + \frac{a^3}{c^2 + ca + a^2}$ (1p)

Atunci $\frac{a^3}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b^3}{b^2 + bc + c^2} + \frac{c^3}{c^2 + ca + a^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{a^3 + b^3}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b^3 + c^3}{b^2 + bc + c^2} + \frac{c^3 + a^3}{c^2 + ca + a^2} \right)$ (2p)

Inegalitatea (*) se obține observând că $\frac{a^3 + b^3}{2} \geq \sqrt{a^3b^3} = ab\sqrt{ab}$ și analogele (2p)

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 15 FEBRUARIE 2015

Clasa a X-a

Problema 1. Determinați numerele reale x pentru care $x^{\sqrt{x}} < (\sqrt{x})^x$.

Aurel Chiriță, Slatina

Inecuația se scrie $x^{\sqrt{x}} < x^{\frac{x}{2}}$ (2p)

Pentru $x \in (0,1)$ rezultă $\sqrt{x} > \frac{x}{2}$, de unde $x \in (0,4) \cap (0,1) = (0,1)$ (2p)

Pentru $x \in (1,\infty)$ rezultă $\sqrt{x} < \frac{x}{2}$, de unde $x \in (4,\infty) \cap (1,\infty) = (4,\infty)$ (2p)

În concluzie, $x \in (0,1) \cup (4,\infty)$ (1p)

Problema 2. Demonstrați că pentru orice număr natural $n \geq 2$ are loc inegalitatea:

$$\lg 2 \cdot \lg 4 \cdot \dots \cdot \lg(2n) < \lg^n(n+1).$$

Eduard Buzdugan, Slatina

Inegalitatea se scrie echivalent $\sqrt[n]{\lg 2 \cdot \lg 4 \cdot \dots \cdot \lg(2n)} < \lg(n+1)$ (1p)

Aplicând inegalitatea mediilor rezultă $\sqrt[n]{\lg 2 \cdot \lg 4 \cdot \dots \cdot \lg(2n)} < \frac{\lg 2 + \lg 4 + \dots + \lg(2n)}{n} = \frac{\lg(2^n \cdot n!)}{n}$ (2p)

Este suficient să arătăm că $\frac{\lg(2^n \cdot n!)}{n} < \lg(n+1)$, care se scrie echivalent

$$2^n \cdot n! < (n+1)^n \Leftrightarrow \sqrt[n]{n!} < \frac{n+1}{2} \text{ (2p)}$$

Ultima inegalitate rezultă din inegalitatea mediilor aplicată numerelor $1, 2, \dots, n$ (2p)

Problema 3. Se consideră numerele complexe, nenule și distincte z_1, z_2, z_3 astfel încât $|z_1| = |z_2| = |z_3|$.

Știind că numerele $w_1 = z_2 + z_3 + \frac{z_2 z_3}{z_1}$, $w_2 = z_3 + z_1 + \frac{z_3 z_1}{z_2}$ și $w_3 = z_1 + z_2 + \frac{z_1 z_2}{z_3}$ sunt reale,

arătați că $w_1 = w_2 = w_3 = 0$.

Marius Perianu, Slatina

Notăm $|z_1| = |z_2| = |z_3| = r > 0$, $s = z_1 + z_2 + z_3$, $m = z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3$, $p = z_1 z_2 z_3$.

Avem $w_k = \frac{m}{z_k}$ (1p)

Cum $w_k \in \mathbb{R}$, rezultă $w_k = \bar{w}_k$ (1p)

Deoarece $\frac{\overline{r}}{z_k} = \frac{r^2}{z_k}$ și $\frac{\overline{m}}{p} = \frac{sr^4}{p}$, din $\frac{m}{z_k} = \frac{\overline{m}}{z_k}$ rezultă $pm = sr^2 z_k^2$, $k=1,2,3$ (2p)

Presupunând $s \neq 0$, rezultă $z_1^2 = z_2^2 = z_3^2 = \frac{pm}{sr^2}$, deci cel puțin două dintre numerele z_1, z_2, z_3 sunt egale, contradicție cu ipoteza (2p)

Ca urmare, $s = 0$, de unde $m = 0$ și deci $w_1 = w_2 = w_3 = 0$ (1p)

Problema 4. Rezolvați ecuația:

$$(3^x + 2)^{\log_5 3} + 2 = (5^x - 2)^{\log_3 5}.$$

Marius Perianu, Gazeta Matematică nr. 6-7-8/2014

Ecuația se rescrie $(3^x + 2)^{\log_5 3} + 2 = 5^{\log_3(5^x - 2)}$ și, notând $y = \log_5(3^x + 2)$, rezultă $3^y + 2 = 5^{\log_3(5^x - 2)}$ sau, echivalent $\log_3(5^x - 2) = \log_5(3^y + 2)$ (2p)

Notând $z = \log_5(3^y + 2)$, rezultă $\log_3(5^x - 2) = z$, de unde $x = \log_5(3^z + 2)$ (1p)

Considerând funcția crescătoare $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t) = \log_5(3^t + 2)$, rezultă $y = f(x)$, $z = f(y)$, $x = f(z)$ (1p)

Presupunând, de exemplu, $x \leq y$, atunci $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y) \Leftrightarrow y \leq z \Rightarrow f(y) \leq f(z) \Leftrightarrow z \leq x$, deci $x \leq y \leq z \leq x$, de unde $x = y = z$ (2p)

Ca urmare, $x = \log_5(3^x + 2) \Leftrightarrow 3^x + 2 = 5^x$, ecuație cu soluția unică $x = 1$. Așadar, $x = y = z = 1$ (1p)

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ OLT

Etapa locală – 15 februarie 2015

CLASA A XI-A

Soluții și bareme de corectare

Problema 1.

Fie $f(x) = \det(xI_2 - A) = x^2 - tx + d$, unde $t = \text{Tr } A$, $d = \det A$ 2p

Deoarece $A^2 + I_2 = (A - iI_2)(A + iI_2)$, rezultă $\det(A^2 + I_2) = f(i)f(-i) = (d - 1)^2 + t^2$ 2p

$\det(A + dI_2) = f(-d) = d^2 + td + d$ 1p

Relația din enunț conduce la $t^2 + 1 = td$, de unde $d = t + \frac{1}{t}$ 1p

Atunci $|d| \geq |t| + \frac{1}{|t|} \geq 2$ 1p

Problema 2.

Notăm $\det(A^2 - AB + B^2) = p$ și $\det(A^2 + AB + B^2) = q$.

Cum $AB = BA \Rightarrow A^4 + A^2B^2 + B^4 = (A^2 - AB + B^2)(A^2 + AB + B^2)$, rezultă $pq = 9$ 2p

Pentru $X = A^2 + B^2$ și $Y = AB$, din identitatea $\det(X + Y) + \det(X - Y) = 2(\det X + \det Y)$, rezultă $p + q = 10$ 4p

Se obține $\{p, q\} = \{1, 9\}$, de unde $\sqrt{p} + \sqrt{q} = 4$ 1p

Problema 3.

a) Folosind eventual faptul că șirul $(c_n)_{n \geq 1}$, $c_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$ este convergent, rezultă:

$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} = c_{2n} + \ln 2n - (c_n + \ln n) = c_{2n} - c_n + \ln 2$, care converge la $\ln 2$ 2p

b) Notăm $b_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$. Deoarece

$$\begin{aligned} 0 &\leq b_n - a_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{n+k} - \frac{1}{k + \sqrt{n^2 + k}} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{n^2 + k} - n}{(n+k)(k + \sqrt{n^2 + k})} = \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{k}{(n+k)(k + \sqrt{n^2 + k})(\sqrt{n^2 + k} + n)} \leq \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^3} = \frac{n(n+1)}{2n^3} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

rezultă că $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$ 4p

Cum $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \ln 2$ și $a_n = b_n - (b_n - a_n)$, deducem că $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \ln 2$ 1p

Problema 4.

Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 1$, rezultă că $f(x) \in (1, 2)$, pentru orice $x \in (1, 2)$ 1p

Cum $x_{n+1} = f(x_n)$, $\forall n \geq 1$, rezultă că $x_n \in (1, 2)$, pentru orice $n \geq 1$, deci șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este mărginit 1p

Deoarece f este strict descrescătoare pe $(1, 2)$, subșirurile $(x_{2n-1})_{n \geq 1}$ și $(x_{2n})_{n \geq 1}$ sunt strict monotone, de monotonii diferite, deci convergente 3p

Fie $a = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_{2n-1})$ și $b = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_{2n})$; atunci, prin trecere la limită rezultă $f(a) = b$ și $f(b) = a$. 1p

Ca urmare a și b sunt soluții ale ecuației $(f \circ f)(x) = x$, care se scrie echivalent $(x^2 - 2)(x^2 - 4x + 6) = 0$.

Cum $a, b \in [1, 2]$, rezultă $a = b = \sqrt{2}$, deci șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este convergent și $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{2}$ 1p

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ OLT

Etapa locală – 15 februarie 2015

CLASA A XII-A

Soluții și bareme de corectare

Problema 1.

a) $a, b \in Z(G) \Rightarrow ab \in Z(G)$ 1p

$a \in Z(G) \Rightarrow a^{-1} \in Z(G)$ 1p

b) Fie $a \in G$ arbitrar. Vom arăta că $ax = xa$, pentru orice $x \in G$.

Dacă $a \in Z(G)$ sau $x \in Z(G)$ afirmația este evidentă 1p

Dacă $a, x \in G \setminus Z(G)$, atunci $a^2 = x^2 = e$. Avem două cazuri:

• dacă $ax \in Z(G)$, atunci $ax \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot ax$, deci $a = x^{-1}ax$, de unde $xa = ax$ 2p

• dacă $ax \notin Z(G)$, atunci $(ax)^2 = e = a^2 \cdot x^2$, de unde $xa = ax$ 2p

Problema 2.

Notând integrala din enunț cu I , cu schimbarea de variabilă $x = \sin^2 t$, rezultă $I = \frac{\pi}{4} \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sin t + \cos t}$ 3p

Cum $\sin t = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}}$, $\cos t = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}}$ și $\left(\operatorname{tg} \frac{t}{2}\right)' = \frac{1}{2} \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}\right)$ 1p

rezultă

$$I = -\frac{\pi}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{\left(\operatorname{tg} \frac{t}{2}\right)' dt}{\operatorname{tg}^2 \frac{t}{2} - 2 \operatorname{tg} \frac{t}{2} - 1} = -\frac{\pi}{2} \int_0^1 \frac{du}{u^2 - 2u - 1} = -\frac{\pi}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{u - 1 - \sqrt{2}}{u - 1 + \sqrt{2}} \right| \Big|_0^1 = \frac{\pi\sqrt{2}}{4} \cdot \ln(1 + \sqrt{2}) \quad 3p$$

Problema 3.

Deoarece legea $*$ este asociativă, rezultă că $(a * b) * a = a * (b * a)$, pentru orice $a, b \in M$ 3p

Notând cu e elementul neutru, rezultă $(a * b) * a * e = e * a * (b * a)$ și, folosind proprietatea de simplificare din ipoteză pentru $x = a$, rezultă $(a * b) * e = e * (b * a)$, de unde $a * b = b * a$, pentru orice $a, b \in M$ 4p

Problema 4.

$(\Leftarrow)$ Dacă $f(a) \geq 0$, atunci $f(t) \geq f(a) \geq 0$ pentru orice $t \in [a, b]$ 1p

Prin urmare, pentru orice $x_1, x_2 \in [a, b]$, $x_1 < x_2$, avem

$$F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(t) dt \geq 0,$$

adică $F(x_1) \leq F(x_2)$ 2p

$(\Rightarrow)$ Presupunem că $f(a) < 0$. Cum f este continuă în a și $f(a) < \frac{f(a)}{2}$, există $c \in (a, b)$ astfel încât

$f(t) < \frac{f(a)}{2}$ pentru orice $t \in [a, c]$ 2p

Obținem $F(c) - F(a) = \int_a^c f(t) dt \leq (c - a) \cdot \frac{f(a)}{2} < 0$, contradicție 2p