

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

CLASA A- VIII – A

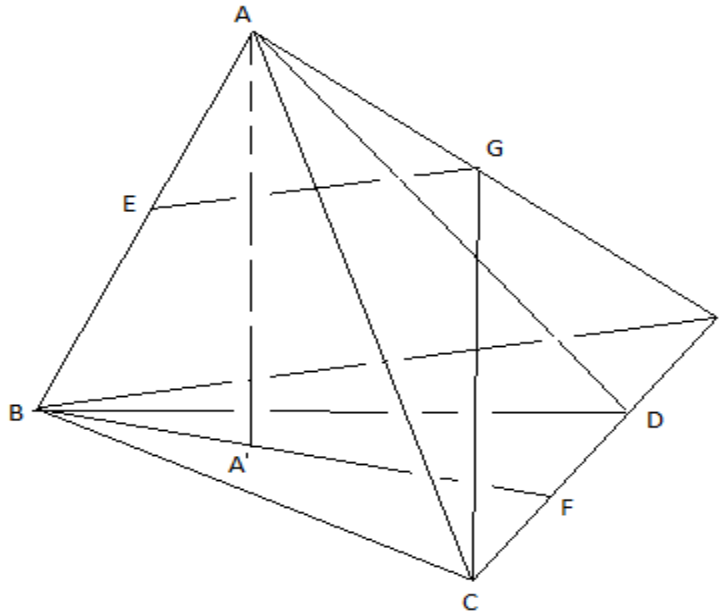
Subiectul I

- a) Se ia $a=9$ și $b=4$ 1p
avem condiția $a^2 - 5b^2 = 9^2 - 5 \cdot 4^2 = 81 - 80 = 1$ deci $(9+4\sqrt{5}) \in A$1p
- b) Fie $x = a + b\sqrt{5}$ cu $a^2 - 5b^2 = 1$ și $y = c + d\sqrt{5}$ cu $c^2 - 5d^2 = 1$ 1p
din calcul $x \cdot y = (ac + 5bd) + \sqrt{5}(ad + bc)$ verificăm dacă $(ac + 5bd)^2 - 5(ad + bc)^2 = 1$1p
din calcul $(ac + 5bd)^2 - 5(ad + bc)^2 = a^2c^2 + 10abcd + 25b^2d^2 - 5a^2d^2 - 10abcd - 5b^2c^2 =$
 $a^2c^2 - 5b^2c^2 - 5a^2d^2 + 25b^2d^2 = c^2(a^2 - 5b^2) - 5d^2(a^2 - 5b^2) = (a^2 - 5b^2)(c^2 - 5d^2) = 1 \cdot 1 = 1$ deci
 $x \cdot y \in A$1p
- c) $\overline{x + y} = (a + c) + \sqrt{5}(b + d) \stackrel{\text{def}}{=} (a + c) - \sqrt{5}(b + d)$,1p
iar $\overline{x} = a - b\sqrt{5}$ și $\overline{y} = c - d\sqrt{5}$ de unde $\overline{x + y} = (a + c) - \sqrt{5}(b + d)$, deci $\overline{x + y} = \overline{x} + \overline{y}$1p

Subiectul II.

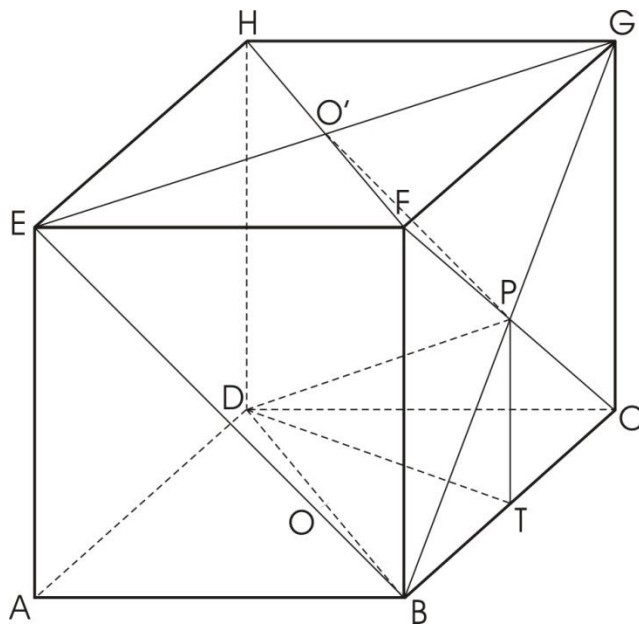
- a) $x^4 + 16y^4 = 16xy - 8 \Leftrightarrow x^4 + 16y^4 - 16xy + 8 = 0$
 $\Leftrightarrow x^4 - 8x^2y^2 + 16y^4 + 8x^2y^2 - 16xy + 8 = 0$
 $\Leftrightarrow (x^2 - 4y^2)^2 + 8(xy - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4y^2$ și $xy = 1$1p
Cazul I $x = 2y \Rightarrow 2y^2 = 1 \Leftrightarrow y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$
Soluțiile ecuației sunt perechile de numere reale :
 $(\sqrt{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}); (-\sqrt{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2})$1p
Cazul II $x = -2y \Rightarrow -2y^2 = 1$
Ecuația nu are soluții reale1p
- b) Vom arăta că numărul $9n^2 + 5n$ nu este pătrat perfect.
 $9n^2 < 9n^2 + 5n < 9n^2 + 6n + 1$1p
 $(3n)^2 < 9n^2 + 5n < (3n + 1)^2$
Între două pătrate perfecte consecutive nu mai există un alt pătrat perfect.
Deci, $\sqrt{9n^2 + 5n}$ este număr irațional.....1p
- c) $0 \leq (a + b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc$ 1p
 $0 \leq \frac{5}{3} + 2(ab - ac - bc) \Leftrightarrow ac + bc - ab \leq \frac{5}{6} < 1$ Împărțind ambii membri ai inegalității
 $ac + bc - ac < 1$ prin $abc > 0$ obținem inegalitatea cerută.....1p

Subiectul III.



- a) $\triangle ABC$ este isoscel, CE mediană $\Rightarrow CE$ înălțime $\Rightarrow CE \perp AB$ 0,5p
 $\triangle DAB$ este isoscel, DE mediană $\Rightarrow DE$ înălțime $\Rightarrow DE \perp AB$ 0,5p
 $AB \perp CD, AB \perp DE \Rightarrow AB \perp (EDC)$.
 $CD \subset (EDC) \Rightarrow AB \perp CD \Rightarrow m(\angle(AB, CD)) = 90^\circ$ 1p
- b) $AA' \perp (BCD) \Rightarrow AA' \perp CD$. $AB \perp CD \Rightarrow CD \perp (ABA') \Rightarrow CD \perp BA'$ 1p
- Deci BA' înălțime în $\triangle BCD$. Dar $\triangle BCD$ este isoscel și BF este mediană, deci înălțime, rezultă că B, A' și F sunt coliniare.....1p
- c) Fie G piciorul perpendicularei din A pe bisectoarea unghiului $\angle ACD$ și $\{I\} = CD \cap AG$.
 $\triangle CAI$ este isoscel deoarece CG bisectoare și înălțime, rezultă CG este mediană $\Rightarrow G$ este mijlocul lui AI 1p
 E este mijlocul lui $(AB) \Rightarrow EG$ este linie mijlocie în $\triangle ABI \Rightarrow EG \parallel BI$ 1p
 $BI \subset (BCD) \Rightarrow EG \parallel (BCD)$ 1p

Subiectul IV.



a) Dacă notăm muchia cubului cu $2a$ obținem:

$BD = 2a\sqrt{2}$ (diagonală în pătratul ABCD);

$BP = a\sqrt{2}$ (raza cercului circumscris pătratului FBCG)

$DP = a\sqrt{6}$ (teorema lui Pitagora în $\triangle DPT$, unde T este mijlocul lui $[BC]$).

Obținem $\triangle BPD$ dreptunghic în P (reciproca teoremei lui Pitagora).....1p

Egalând aria: $5\sqrt{3} = \frac{BP \cdot DP}{2}$, obținem $a = 5$. Deci, muchia cubului are 10 cm.....1p

b) Dreptele DP și EB sunt necoplanare. Ducem prin P o paralelă la EB.

$[O'P]$ este linie mijlocie în $\triangle EGB$, O' este centrul pătratului EFGH.

$u^0 = m(\widehat{DP; EB}) = m(\widehat{DP; O'P}) = m(\widehat{DPO'})$ 1p

$DP = 5\sqrt{6}$ cm; $O'P = 5\sqrt{2}$ cm; $DO' = 5\sqrt{6}$ cm.....1p

Vom obține $\text{tg } u^0 = \sqrt{11}$1p

c) $(EDG) \cap (EDB) = EG$

$\triangle EBG$ echilateral $\Rightarrow BO' \perp EG$, $BO' = 5\sqrt{6}$ cm.

$\triangle EDG$ echilateral $\Rightarrow DO' \perp EG$, $DO' = 5\sqrt{6}$ cm.

$m[(\widehat{EDG}); (\widehat{EBG})] = m(\widehat{DO'; BO'}) = m(\widehat{DOB}) = a^0$ 1p

Obținem $\cos a^0 = \frac{1}{3}$ sau $\sin a^0 = \frac{2\sqrt{2}}{3}$1p