



OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
22 februarie 2014

CLASA a IX-a
Bareme de corectare

SUBIECTUL I

Să se determine funcția $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ știind că $1^2 f(1) + 2^2 f(2) + \dots + n^2 f(n) = \frac{n^2 (f(n) + 1)^2}{4}$

oricare ar fi numărul natural nenul n .

Soluție.

$$n=1 \Rightarrow f(1)=1, n=2 \Rightarrow f(2)=2 \dots\dots\dots 2p$$

$$\text{Intuire } f(n)=n \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Demonstrație prin inducție că } f(n)=n \dots\dots\dots 4p$$

SUBIECTUL II

Fie ecuația $p + [x] = [px]$, unde p este un număr natural.

Determinați numerele naturale p pentru care ecuația are soluții naturale.

Rezolavați ecuația pentru $p=2$.

Soluție.

$$a) x=n \in \mathbb{N}, p+n=np, n=\frac{p}{p-1}=1+\frac{1}{p-1} \dots\dots\dots 1p$$

$$p-1 \in \{-1, 1\}, p \in \{0, 2\} \dots\dots\dots 2p$$

$$b) p=2, 2=[2x]-[x] \dots\dots\dots 1p$$

$$2=[2x]-[x]=\left[x+\frac{1}{2}\right] \dots\dots\dots 1p$$

$$x \in \left[\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right) \dots\dots\dots 2p$$

SUBIECTUL III

Fie $a, b, c \in (0, \infty)$ astfel încât $abc=1$. Să se demonstreze că

$$2(a^5 + b^5 + c^5) \geq \frac{a^3 + b^3}{c} + \frac{b^3 + c^3}{a} + \frac{c^3 + a^3}{b} \geq \frac{a+b}{c^2} + \frac{b+c}{a^2} + \frac{c+a}{b^2}.$$

Soluție.

$$x^5 + y^5 \geq xy(x^3 + y^3) \geq x^2 y^2 (x + y) \quad (1) \dots\dots\dots 4p$$

$$\text{În (1) } \{x, y\} = \{a, b\}, \{x, y\} = \{b, c\}, \{x, y\} = \{a, c\} \text{ și se însumează } \dots\dots\dots 2p$$

$$\text{Se ține cont că: } ab(a^3 + b^3) = \frac{1}{c}(a^3 + b^3), a^2 b^2 (a + b) = \frac{1}{c^2}(a + b) \dots\dots\dots 1p$$

SUBIECTUL IV



Pe laturile paralelogramului $ABCD$ se consideră punctele $M \in (AB)$, $N \in (BC)$, $P \in (CD)$, $Q \in (DA)$. Se notează cu G_1, G_2, G_3, G_4 centrele de greutate ale triunghiurilor QAM , MBN , NCP , respectiv PDQ . Să se arate că:

$G_1G_2G_3G_4$ este paralelogram.

Paralelogramele $ABCD$ și $G_1G_2G_3G_4$ au laturile paralele dacă și numai dacă $MP \parallel BC$ și $NQ \parallel AB$.

Soluție

a) $ABCD$ paralelogram $\vec{r}_A + \vec{r}_C = \vec{r}_B + \vec{r}_D$ (1).....1p

$$3\vec{r}_{G_1} = \vec{r}_A + \vec{r}_Q + \vec{r}_M, 3\vec{r}_{G_3} = \vec{r}_C + \vec{r}_P + \vec{r}_N, 3(\vec{r}_{G_1} + \vec{r}_{G_3}) = \vec{r}_A + \vec{r}_C + \vec{r}_M + \vec{r}_N + \vec{r}_P + \vec{r}_Q \quad (2).....1p$$

$$3(\vec{r}_{G_2} + \vec{r}_{G_4}) = \vec{r}_B + \vec{r}_D + \vec{r}_M + \vec{r}_N + \vec{r}_P + \vec{r}_Q \quad1p$$

(1), (2), (3) $\Rightarrow \vec{r}_{G_1} + \vec{r}_{G_3} = \vec{r}_{G_2} + \vec{r}_{G_4} \Rightarrow G_1G_2G_3G_4$ este paralelogram.....1p

$$b) \vec{G_1G_2} = \vec{r}_{G_2} - \vec{r}_{G_1} = \frac{1}{3}(\vec{r}_B - \vec{r}_A + \vec{r}_N - \vec{r}_Q) = \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{QN}, \vec{G_1G_2} \parallel \vec{AB} \Leftrightarrow \vec{AB} \parallel \vec{QN} \quad2p$$

$$\vec{G_2G_3} \parallel \vec{BC} \Leftrightarrow \vec{BC} \parallel \vec{MP} \quad1p$$

CLASA a X-a Bareme de corectare

SUBIECTUL I

Demonstrați inegalitatea: $\frac{(x+1)^2}{3\sqrt{(yz)^2+1}} + \frac{(y+1)^2}{3\sqrt{(zx)^2+1}} + \frac{(z+1)^2}{3\sqrt{(xy)^2+1}} \geq 3$, unde $x, y, z > 0$. În ce caz

avem egalitate?

Soluție.

$$3\sqrt{(yz)^2+1} = 3\sqrt{yz(yz)+1} \leq y+z+yz+1 = (y+1)(z+1) \quad2p$$

$$3\sqrt{(yz)^2+1} \leq (y+1)(z+1) \text{ și analoagele} \quad1p$$

$$\text{Atunci } \sum \frac{(x+1)^2}{3\sqrt{(yz)^2+1}} \geq \sum \frac{(x+1)^2}{(y+1)(z+1)} \geq 3\sqrt[3]{\prod \frac{(x+1)^2}{(y+1)(z+1)}} = 3 \quad3p$$

Egalitate pentru $x=y=z=xy=yz=zx$, $x=y=z=1$ 1p

SUBIECTUL II

Să se rezolve sistemul de ecuații: $\begin{cases} 2^x + 3^y = 7 \\ \log_2 x - \log_3 y = 1 \end{cases}$.

Soluție.

$$\log_3 y = t, y = 3^t \quad1p$$

Din a doua ecuație, avem $\log_2 x = 1+t$, adică $x = 2^{1+t}$ 1p

Prima ecuație a sistemului devine $2^{2^{1+t}} + 3^{3^t} = 7$ 1p

Se observă că ecuația are soluția $t = 0$ 1p

Dacă $t > 0$, atunci avem succesiv $2^{t+1} > 2$, $2^{2^{t+1}} > 2^2 = 4$, $3^t > 1$, $3^{3^t} > 3$ și atunci

$$2^{2^{t+1}} + 3^{3^t} > 4 + 3 = 7, \text{ deci } 2^{2^{t+1}} + 3^{3^t} \neq 7 \dots\dots\dots 2p$$

În mod analog pentru $t < 0$, avem $2^{t+1} < 2$, $2^{2^{t+1}} < 2^2 = 4$, $3^t < 1$, $3^{3^t} < 3$ și atunci

$$2^{2^{t+1}} + 3^{3^t} < 4 + 3 = 7, \text{ deci } 2^{2^{t+1}} + 3^{3^t} \neq 7 \dots\dots\dots 1p$$

SUBIECTUL III

a) Ordonăți crescător numerele $\sqrt[3]{26}$, $\log_2 9$, $\sqrt[3]{16} - 1$, $\log_3 82$.

b) Rezolvați ecuația $(\sqrt[3]{16} - 1)^x + (\sqrt[3]{26})^x + (\log_2 9)^x + (\log_3 82)^x = 2^{\sqrt{4-x}}$

Soluție. a)

$$1 < \sqrt[3]{16} - 1 < 2 < \sqrt[3]{26} < 3 \dots\dots\dots 2p$$

$$3 < \log_2 9 < 4 < \log_3 81 \dots\dots\dots 1p$$

$$1 < \sqrt[3]{16} - 1 < \sqrt[3]{26} < \log_2 9 < \log_3 81 \dots\dots\dots 1p$$

b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (\sqrt[3]{16} - 1)^x + (\sqrt[3]{26})^x + (\log_2 9)^x + (\log_3 82)^x$ strict crescătoare.....1p

$g: (-\infty, 4] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 2^{\sqrt{4-x}}$ strict descrescătoare.....1p

Ecuația are soluția unică $x = 0 \dots\dots\dots 1p$

SUBIECTUL I V

Fie a, b, c numere complexe distincte și de același modul. Să se arate că punctele de afixe a, b, c sunt vârfurile unui triunghi echilateral dacă și numai dacă $a^3(b-c) + b^3(c-a) + c^3(a-b) = 0$

Soluție.

$$a^3(b-c) + b^3(c-a) + c^3(a-b) = 0 \Leftrightarrow (a-b)(b-c)(a-c)(a+b+c) = 0, \text{ de unde } a+b+c = 0$$

$$\dots\dots\dots 3p$$

$$a+b+c=0, |a|=|b|=|c| \Rightarrow \text{triunghi echilateral} \dots\dots\dots 2p$$

$$\text{triunghi echilateral, } |a|=|b|=|c| \Rightarrow a+b+c=0 \dots\dots\dots 2p$$

CLASA a XI-a **Bareme de corectare**

SUBIECTUL I

Să se determine matricele $A \in M_3(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix}$ pentru care există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât

$$A^n = I_3.$$

Soluție.

Inducție $A^n = \begin{pmatrix} \frac{(a+b)^n + (a-b)^n}{2} & 0 & \frac{(a+b)^n - (a-b)^n}{2} \\ 0 & c^n & 0 \\ \frac{(a+b)^n - (a-b)^n}{2} & 0 & \frac{(a+b)^n + (a-b)^n}{2} \end{pmatrix} \dots\dots\dots 3p$

Din $A^n = I_3$, rezultă $\begin{cases} a = \pm 1 \\ b = 0 \\ c = \pm 1 \end{cases}$ sau $\begin{cases} a = 0 \\ b = \pm 1 \\ c = \pm 1 \end{cases} \dots\dots\dots 2p$

$A = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}, A^2 = I_3 \dots\dots\dots 1p$

$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \pm 1 \\ 0 & \pm 1 & 0 \\ \pm 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A^4 = I_3 \dots\dots\dots 1p$

SUBIECTUL II

a) Să se găsească două matrice de ordin doi cu elemente reale cu proprietatea că $A^2 + B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

b) Să se arate că orice două matrice pătratice de ordin doi cu elemente reale cu proprietatea că $A^2 + B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ nu comută

Soluție

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, B^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, A = \frac{\sqrt{3}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \dots\dots\dots 3p$

b) Dacă $AB = BA \Rightarrow \det(A^2 + B^2) = \det(A^2 - i^2 B^2) = \det(A + iB) \cdot \overline{\det(A + iB)} \geq 0 \dots\dots 2p$

$\det(A^2 + B^2) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5 < 0$, contradicție.....2p

SUBIECTUL III

Fie $(a_n)_{n \geq 0}, (b_n)_{n \geq 0}, (c_n)_{n \geq 0}$ trei șiruri de numere reale cu proprietatea că pentru orice număr natural n are loc relația $a_n + b_n + c_n = 1$. Dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n^2 + b_n^2 + c_n^2) = \frac{1}{3}$, să se arate că

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \frac{1}{3}$.

Soluție

$\left(a_n - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(b_n - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(c_n - \frac{1}{3}\right)^2 = a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 - \frac{1}{3} \dots\dots\dots 3p$

și atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(a_n - \frac{1}{3} \right)^2 + \left(b_n - \frac{1}{3} \right)^2 + \left(c_n - \frac{1}{3} \right)^2 \right) = 0 \dots\dots\dots 2p$

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \frac{1}{3} \dots\dots\dots 2p$

SUBIECTUL I V

Fie șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ dat prin relația $x_{n+1} = 2x_n^2 - 11x_n + 18, \forall n \geq 0, x_0 \in \left(\frac{5}{2}, 3 \right)$. Să se demonstreze că șirul este convergent și calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} n(x_n - l)$, unde $l = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Soluție.

Monotonia: $x_{n+1} - x_n = 2x_n^2 - 12x_n + 18 = 2(x_n - 3)^2 > 0$, deci șirul este crescător.....1p

Mărginirea: inducție $x_n \in \left(\frac{5}{2}, 3 \right) \dots\dots\dots 2p$

Limita: $l = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n, l = 2l^2 - 11l + 18, l = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 3 \dots\dots\dots 1p$

$$n(x_n - 3) = -\frac{n}{\frac{1}{3 - x_n}}, \text{ Stoltz Cesaro,}$$

$$\frac{\frac{n+1-n}{1} - \frac{n}{3-x_{n+1}}}{\frac{1}{3-x_{n+1}} - \frac{1}{3-x_n}} = \frac{(3-x_{n+1})(3-x_n)}{x_{n+1} - x_n} = \frac{(-15+11x_n-2x_n^2)(3-x_n)}{2(x_n-3)^2} \dots\dots\dots 1p$$

$$\frac{(-15+11x_n-2x_n^2)(3-x_n)}{2(x_n-3)^2} = \frac{15-11x_n+2x_n^2}{2(x_n-3)} = \frac{2x_n-5}{2} \dots\dots\dots 1p$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(x_n - 3) = -\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\frac{1}{3-x_n}} = -\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2x_n-5}{2} = -\frac{1}{2} \dots\dots\dots 1p$$

CLASA a XII-a
Bareme de corectare

SUBIECTUL I

Fie șirul $(a_n)_{n \geq 0}, a_n = 4^{6^n} + 7, \forall n \in \mathbb{N}$.

1. Să se arate că în Z_{11} , avem $\hat{a}_n = \hat{0}, \forall n \in \mathbb{N}$.

2. Să se arate că în Z_5 , este adevărată afirmația: există $\hat{b} \in Z_5$ astfel încât $\hat{a}_n \cdot \hat{b} = \hat{1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Soluție.

1. Pentru $n \geq 0, 4^{6^n} = 4^{(5+1)^n} = 4^{5p+1} = 4 \cdot 4^{5p} = 4 \cdot 1024^p$ și cum $1024 = M_{11} + 1$, atunci

$a_n = 4(M_{11} + 1)^p + 7 = M_{11} + 11 = M_{11}$ și deci $\hat{a}_n = \hat{0}$ în $Z_{11} \dots\dots\dots 3p$



2. Pentru $n \geq 1$, $4^{6^n} = (5-1)^{6^n} = M_5 + (-1)^{6^n} = M_5 + 1$ și atunci $a_n = M_5 + 8 = M_5 + 3$, adică $\hat{a}_n = \hat{3}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Atunci $\hat{b} = \hat{2}$ pentru că $\hat{2} \cdot \hat{3} = \hat{1}$4p

SUBIECTUL II

Fie $(G, \cdot)$ un grup, e elementul său neutru, $p \geq 1$ un număr natural și elementele distincte $a, b \in G - \{e\}$ satisfac condițiile: $b^{3p} = e$ și $ab = b^{2p}a$. Arătați că

1. $b^3 = e$

2. $ab = ba$ dacă și numai dacă $3 \mid (p-2)$

Rezolvare:

1. $ab = b^{2p}a \Rightarrow b^{2p} = aba^{-1}$, $b^p = b^p e = b^p b^{3p} = b^{2p} b^{2p} = aba^{-1} aba^{-1} = ab^2 a^{-1}$ și deci $b^p a = ab^2$ 2p

De asemenea $e = b^{3p} = b^p b^{2p} = ab^2 a^{-1} aba^{-1} = ab^3 a^{-1}$, deci $ab^3 a^{-1} = e$, de unde $b^3 = a^{-1} e a = e$ 2p

2.

„ $\Leftarrow$ ”. Dacă $p \pmod{3} = 2$, atunci cum $b^3 = e$, avem $ab = b^{2p}a = ba$ 1p

„ $\Rightarrow$ ”. Presupunem prin absurd că $p \pmod{3} \neq 2$, deci $p \pmod{3} \in \{0, 1\}$

Dacă $p \pmod{3} = 0$, atunci cum $b^3 = e$, avem $ab = b^{2p}a = a$, de unde $b = e$, ceea ce nu este posibil...1p

Dacă $p \pmod{3} = 1$, atunci cum $b^3 = e$, avem $ab = b^{2p}a = b^2a$ și cum $ab = ba$ avem $ba = ab = b^2a$ și imediat $b = e$, ceea ce nu este posibil.....2p

SUBIECTUL III

Fie $p \geq 2$ un număr natural și șirul $(I_n)_{n \geq 1}$, $I_n = \int_1^2 \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1 + \underbrace{\sqrt[p]{x^p \sqrt[p]{x} \cdots \sqrt[p]{x}}}_{n \text{ radicali}}} dx$.

a) Calculați I_1

b) Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$

Soluție

a) $I_1 = \int_1^2 \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1 + \sqrt[p]{x}} dx$ $\sqrt[p]{x} = t$, $x = t^p$ 1p

$I_1 = \frac{1}{p} \int_1^{2^p} \frac{1}{t(1+t)} dt = \frac{1}{p} (\ln t - \ln(t+1)) \Big|_1^{2^p} = \frac{1}{p} \ln \frac{2^{p+1}}{1+2^p}$ 2p

b) $\sqrt[p]{x^p \sqrt[p]{x} \cdots \sqrt[p]{x}} = x^\alpha$ unde $\alpha = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{p}\right)^k = \frac{1}{p-1} \left(1 - \left(\frac{1}{p}\right)^n\right)$ 1p

$I_n = \int_1^2 \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1+x^\alpha} dx = \int_1^2 \frac{x^{\alpha-1}}{x^\alpha \cdot (1+x^\alpha)} dx$, $I_n = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{x^{\alpha-1}}{1+x^\alpha}\right) dx$ 1p

$$I_n = \left(\ln x - \frac{1}{\alpha} \ln(1+x^\alpha) \right) \Big|_1^2 = \ln 2 - \frac{1}{\alpha} \ln \frac{1+2^\alpha}{2} \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Cum } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{p-1} \left(1 - \left(\frac{1}{p} \right)^n \right) = \frac{1}{p-1}, \text{ atunci } \lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \ln 2 - (p-1) \ln \frac{1+2^{\frac{1}{p-1}}}{2} \dots\dots\dots 1p$$

SUBIECTUL I V

Fie $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție de două ori derivabilă cu derivata de ordinul doi continuă, având

$$f(0) = f(1). \text{ Să se arate că } \int_0^1 (f''(x))^2 dx \geq 120 \left(\int_0^1 x f'(x) dx \right)^2.$$

Soluție.

$$\text{C.B.S.: } \left(\int_0^1 (f''(x))^2 dx \right) \left(\int_0^1 (x^2 - x)^2 dx \right) \geq \left(\int_0^1 (x^2 - x) f''(x) dx \right)^2 \dots\dots\dots 2p$$

$$\int_0^1 (x^2 - x)^2 dx = \left(\frac{x^5}{5} - 2 \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{30} \dots\dots\dots 1p$$

$$\int_0^1 (x^2 - x) f''(x) dx = (x^2 - x) f'(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 (2x - 1) f'(x) dx = -2 \int_0^1 x f'(x) dx + \int_0^1 f'(x) dx \dots\dots 2p \text{ Deoarece}$$

$$\int_0^1 f'(x) dx = f(x) \Big|_0^1 = 0, \text{ avem } \int_0^1 (x^2 - x) f''(x) dx = -2 \int_0^1 x f'(x) dx \dots\dots\dots 1p$$

$$\left(\int_0^1 (x^2 - x) f''(x) dx \right)^2 = 4 \left(\int_0^1 x f'(x) dx \right)^2 \text{ și } \frac{1}{30} \left(\int_0^1 (f''(x))^2 dx \right) \geq 4 \left(\int_0^1 x f'(x) dx \right)^2 \dots\dots\dots 1p$$