OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE ASTRONOMIE ȘI ASTROFIZICĂ

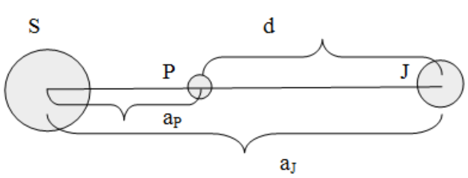
IAȘI
EDIȚIA a XXI-a
24-29 MAI 2024
PROBA TEORETICĂ SCRISĂ
BAREM
CATEGORIA SENIORI 1

- **Se punctează oricare alte formulări/modalități de rezolvare corectă a cerințelor.**
- **Nu se acordă punctaje intermediare la subiectele de tip grilă.**
- **Durata probei este de 4 ore.**

<u>Subiectul I (10 puncte)</u>

1. D
2. C
3. C
4. B 34,97min

Rezolvare:



$$d = a_J - a_P = 4{,}204.1{,}496.10^{11} m;$$

$$t = \frac{d}{v} = \frac{6{,}289.10^{11}}{2{,}997.10^{8}} = 2098s = 34{,}966min;$$

5. B
6. C
7. D
8. Scala pixelului = $\frac{3{,}27 \times 10^{-6}}{1{,}2}\ rad = 0{,}56''$. Răspuns A.
9. Grosismentul se poate exprima ca:

$$G = \frac{f_{ob}}{f_{oc}} = \frac{FOV_{oc}}{FOV_{tot}} \Rightarrow$$

$$FOV_{tot} = \frac{FOV_{oc} \times f_{oc}}{f_{ob}} = \frac{36 \times 0,24}{1,2} = 7,2°$$

Răspuns B.

10. Răspuns A.

Rezolvare
Pentru calculul diametrului unghiular în secunde de arc $\theta'' = 206265\frac{D}{d}$
Diametrul real $D = 2 \cdot v \cdot t = 2000\text{km/s} \cdot 3,16 \cdot 10^7\text{s}=6,32 \cdot 10^{10}\text{km}$
Diametrul unghiular după un an va fi $\theta'' = 206265 \frac{6,32 \cdot 10^{10}\text{km}}{10000 \cdot 3,1 \cdot 10^{13}\text{km}} \Rightarrow \theta = 0,04''$

<u>Subiectul II (15 puncte)</u>

II.1. Pe arhipelagul Toscan (8 puncte)

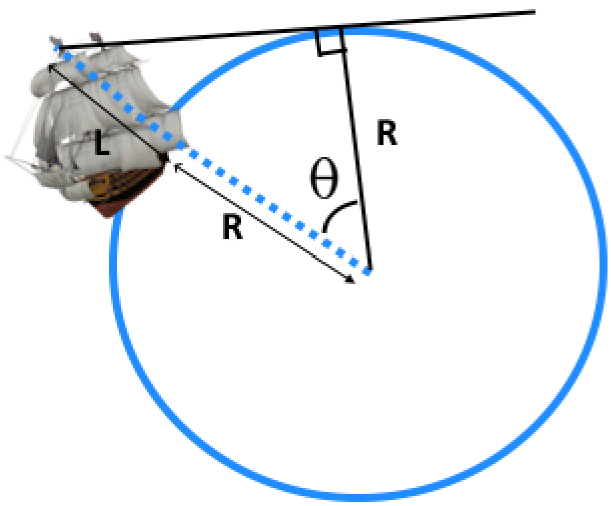
Una dintre cele mai cunoscute dovezi în favoarea sfericității Pământului este observarea unei nave care se îndepărtează de coastă: corpul navei dispare în timp ce catargul este încă vizibil, chiar dacă distanța ar fi de așa natură încât să vă permită să vedeți în continuare întreaga navă. Fenomenul este observat de către un locuitor al insulei Pianosa de pe arhipelagului Toscan, care privește o navă la orizont. Acesta estimează că după ce nava a dispărut, catargul a mai putut fi văzut aproximativ 45 de minute.

a. **(2 puncte)** De ce dispare doar corpul navei, iar catargul rămâne încă vizibil?

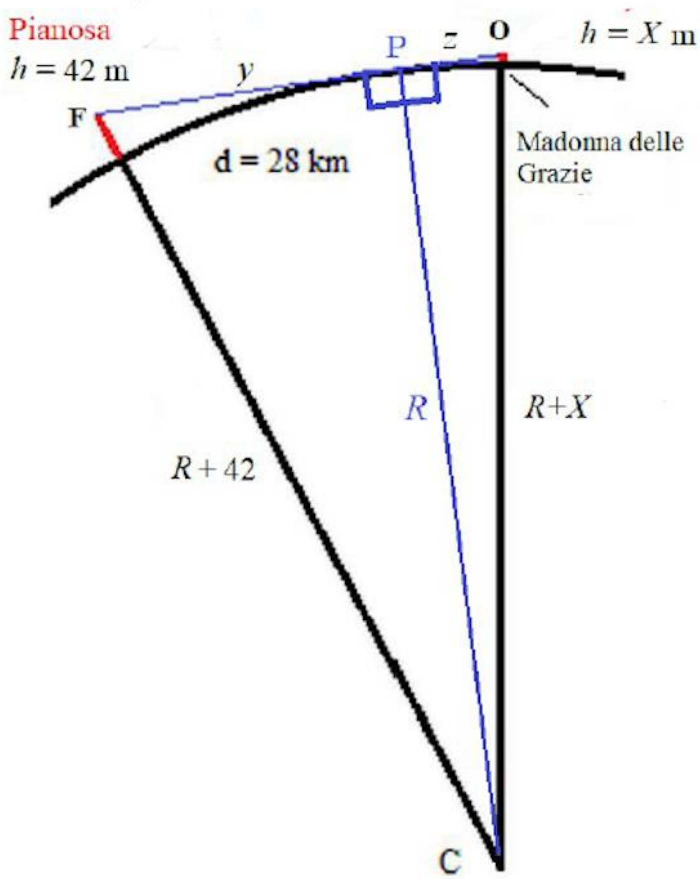
b. **(3 puncte)** Considerând lungimea catargului de L = 50 m și raza Pământului R = 6400 km, estimați viteza cu care nava se îndepărtează de insula Pianosa.

De pe insula Elba a arhipelagului Toscan se poate vedea lumina farului insulei Pianosa, la d = 28 km depărtare. Observatorii aflați pe malul plăjii Madonna delle Grazie au remarcat că doar persoanele mai înalte, cu înălțimea h > X = 1.8m, mai pot vedea lumina farului, care se află la h = 42 m altitudine față de nivelul mării.

c. **(3 puncte)** Estimați raza Pământului.

Rezolvare	**Punctaj**
a. Motivul este curbura Pământului, care acoperă doar partea inferioară a navei.	2
b. Desen 	
$$sin\theta = \frac{\sqrt{(R+L)^2 - R^2}}{R+L}$$	0,5
Se aplică aproximația Bernoulli $(1+x)^n \approx 1 + nx$ pentru $x \ll 1$ $$sin\theta = \frac{R}{R+L}\sqrt{\left(1+\frac{L}{R}\right)^2 - 1} \approx \frac{R}{R+L}\sqrt{1+2\frac{L}{R} - 1} = \frac{R}{R+L}\sqrt{2\frac{L}{R}}$$	0,5
Aproximația pentru unghiuri mici, $$sin\theta \approx \theta$$	0,5
Presupunem constantă viteza cu care nava se îndepărtează de insula Pianosa, fiind tangențială cu raza Pământului, $$v = R\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$	0,5

Distanța parcursă de navă în intervalul precizat de observator este $$R\Delta\theta = R\theta = R\frac{R}{R+L}\sqrt{2\frac{L}{R}} \approx \sqrt{2RL}$$ De unde obținem viteza $$v = \frac{\sqrt{2RL}}{\Delta t}$$	0,5
Calcul numeric: $$v = \frac{\sqrt{2 \cdot\ 6400km \cdot\ 0.05km}}{0.75h} = 33\ km/h$$	0,5
c. Soluția 1	

 	
Se aplică teorema lui Pitagora pentru triunghiurile PCF și PCO, $(R+h_z)^2 = R^2 + z^2$ $\left(R+h_y\right)^2 = R^2 + y^2$ unde $h_z = X = 1.8m$ și $h_y = 42m$, iar x și y sunt distanțele până la linia orizontului pentru cele două locații	0,5
$y + z \approx d = 28\ km$	0,5
Calcul intermediar $R^2 + h_z^2 + 2Rh_z = R^2 + z^2$ $R^2 + h_y^2 + 2Rh_y = R^2 + y^2$ $\Rightarrow h_z^2 + 2Rh_z - z^2 = h_y^2 + 2Rh_y - y^2$ $\Leftrightarrow y^2 - z^2 = h_y^2 - h_z^2 + 2R\left(h_y - h_z\right) = (2R + h_y + h_z)(h_y - h_z)$ $y^2 - z^2 = (y-z)(y+z) \approx d(y-z)$ $\Rightarrow\ y - z = \dfrac{(2R + h_y + h_z)(h_y - h_z)}{d}$	0,25
$y = \dfrac{d + \dfrac{(2R + h_y + h_z)(h_y - h_z)}{d}}{2} \approx \dfrac{d^2 + 2R(h_y - h_z)}{2d}$	0,25

$$z=\frac{d-\frac{(2R+h_y+h_z)(h_y-h_z)}{d}}{2}\approx\frac{d^2-2R(h_y-h_z)}{2d}$$	
$$(R+h_z)^2=R^2+z^2\Rightarrow R^2+h_z^2+2Rh_z=R^2+\frac{\left(d^2-2R\left(h_y-h_z\right)\right)^2}{4d^2}$$ $$h_z^2+2Rh_z=\frac{d^4+4R^2\left(h_y-h_z\right)^2-4Rd^2\left(h_y-h_z\right)}{4d^2}$$ $$4d^2(h_z^2+2Rh_z)=d^4+4R^2\left(h_y-h_z\right)^2-4Rd^2\left(h_y-h_z\right)$$ $$R^2\left(h_y-h_z\right)^2-Rd^2\left(h_y+h_z\right)+\frac{d^4}{4}-d^2h_z^2=0$$ $$R^2\left(h_y-h_z\right)^2-Rd^2\left(h_y+h_z\right)+\frac{d^4}{4}\approx 0$$	0,25
Se rezolvă ecuația de gradul II, $$R=\frac{d^2\left(h_y+h_z\right)\pm\sqrt{d^4\left(h_y+h_z\right)^2-d^4\left(h_y-h_z\right)^2}}{2\left(h_y-h_z\right)^2}$$ $$R=\frac{d^2\left(h_y+h_z\right)\pm 2d^2\sqrt{h_yh_z}}{2\left(h_y-h_z\right)^2}$$ $$R=\frac{h_y+h_z\pm 2\sqrt{h_yh_z}}{2\left(h_y-h_z\right)^2}d^2$$	0,25
Soluția validă este $$R=\frac{h_y+h_z-2\sqrt{h_yh_z}}{2\left(h_y-h_z\right)^2}d^2,$$ deoarece pentru cealaltă soluție se obține $$z=\frac{d^2-2\frac{h_y+h_z+2\sqrt{h_yh_z}}{2\left(h_y-h_z\right)^2}d^2\left(h_y-h_z\right)}{2d}$$ $$z=\frac{d}{2}-\frac{d}{2}\frac{h_y+h_z+2\sqrt{h_yh_z}}{h_y-h_z}=-\frac{d\left(h_z+\sqrt{h_yh_z}\right)}{\left(h_y-h_z\right)}<0$$ $z<0\Rightarrow$ soluție inacceptabilă fizic	0,5
Calcul numeric: $$R=6400\ km$$	0,5
c. Soluția 2	

În cazul în care lucrăm în aproximația unghiurilor mici (ca în subpunctul b), obținem $$y \approx \sqrt{2Rh_y}$$ $$z \approx \sqrt{2Rh_z}$$	1,5
$$y + z \approx d = 28\ km$$	0,5
Combinând relațiile anterioare se obține rapid $$R = \frac{d^2}{2(h_z + h_y + 2\sqrt{h_z h_y})} = \frac{h_y + h_z - 2\sqrt{h_y h_z}}{2(h_y - h_z)^2} d^2$$	0,5
Calcul numeric: $$R = 6400\ km$$	0,5
Total	**8**

II.2. Eclipse în sistem binar de stele (7 puncte)

Se consideră un sistem binar de stele, dintre care una este albă iar cealaltă albastră. Steaua albă este cu $0{,}8^m$ mai strălucitoare decât steaua albastră, iar raza sa este de 2,8 ori mai mare. Determinati:

a) **(3,5 puncte)** Cu cât scade magnitudinea aparentă a sistemului in timpul eclipsei principale.

b) **(3,5 puncte)** Cu cât scade magnitudinea aparentă a sitemului in timpul eclipsei secundare.

Observație: Considerați că eclipsele sunt centrale.

a) Fie m_1 magnitudinea stelei albe, m_2 magnitudinea stelei albastre iar m magnitudinea lor totală. Aplicând formula lui Pogson: $m_2 - m = 2{,}5\lg\left(\frac{F_1 + F_2}{F_2}\right)$	0,5 p
Întrucât stelele sunt la aceeasi distanță: $F \sim L$	0,5p
Prin urmare avem: $m_2 - m = 2{,}5\lg\left(\frac{L_1 + L_2}{L_2}\right) = 2{,}5\lg\left(\frac{L_1}{L_2} + 1\right)$	0,5 p
$\frac{L_1}{L_2} = 10^{0{,}4(m_1 - m_2)} \approx 2{,}09$	0,5p
Atunci, magnitudinea totală este:	0,5p

$m = m_2 - 2,5\lg 3,09 = m_2 - 1,22$	
În cazul în care steaua albă eclipsează steaua albastră, doar steau albă este vizibila, prin urmare magnitudinea aparentă totală a sistemului este chiar magnitudinea stelei albe. Așadar: $\Delta m = m_1 - m = m_1 - m_2 + 1,22 = -0,8 + 1,22 = 0,42$	0,5p 0,5p
b) În cazul eclipsei secundare, steaua albastră trece prin fața stelei albe blocând astfel o parte din lumina ce vine de la steaua albă. Fracțiunea de lumina care se va vedea de la steaua albă este: $f = \frac{R_1^2 - R_2^2}{R_1^2} = 1 - \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 = 0,87$	0,5p 1p
Magnitudinea totală a ssistemului în acest caz este: $m_2 - m' = 2,5\lg\left(\frac{0,87L_1 + L_2}{L_2}\right) = 2,5\lg\left(\frac{0,87L_1}{L_2} + 1\right)$ $m_2 - m' \approx 1,12$ $m' = m_2 - 1,12$	1p
Magnitudinea sistemului se va modifica cu: $\Delta m' = m_2 - 1,12 - (m_2 - 1,22) = 0,1$	1 p

Subiectul III (25 puncte)

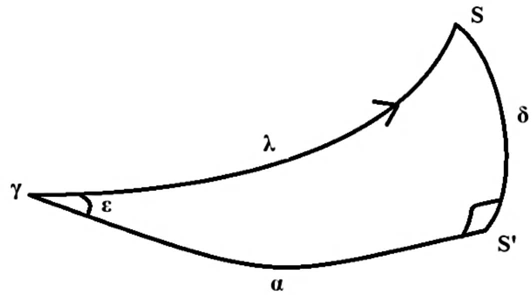
III.1. Răsăritul și apusul Soarelui la Suceava (8 puncte)

Un observator aflat la Suceava (latitudinea este $\varphi = 47°38'$, longitudinea este $\lambda = 26°15°\ E$) observă Soarele la orizont. În ziua observației, ascensia dreaptă a Soarelui era $\alpha = 23^h$, iar ecuația timpului avea valoarea $\eta = 10^m$. Momentul răsăritului/apusului se consideră atunci când centrul discului solar intersectează linia orizontului. Se va ține cont de refracția atmosferică la orizont, de 35'.

a) **(3 puncte)** Calculați declinația Soarelui și estimați data la care are loc observația.
b) **(3 puncte)** Determinați unghiurile orare și azimutele de răsărit, respectiv apus ale Soarelui.
c) **(2 puncte)** Să se calculeze ora la care răsare, respectiv, apune Soarele.

Rezolvare:

a) Avem nevoie de coordonate ecliptice, deoarece ascensia dreaptă nu variază liniar în timp, în timp ce longitudinea ecliptică variază liniar (presupunând o mișcare uniformă a Pământului în jurul Soarelui).



Considerăm triunghiul sferic ecliptic specific Soarelui, unde γ este punctul vernal, S este poziția Soarelui, $\varepsilon = 23°26'$ este oblicitatea eclipticii față de ecuatorul ceresc, S' este proiecția Soarelui pe ecuatorul ceresc, deci $\widehat{SS'\gamma} = 90°$.

Aplicăm formulele consacrate din trigonometria sferică, pentru a deduce relații între măsurile unghiurilor și arcelor marcate pe desenul de mai sus...

$$\cos\lambda = \cos\alpha\cos\delta + \sin\alpha\sin\delta\cos 90° = \cos\alpha\cos\delta\,;$$

$$\cos\delta = \cos\alpha\cos\lambda + \sin\alpha\sin\lambda\cos\varepsilon\,;$$

$$\frac{\sin\varepsilon}{\sin\delta} = \frac{\sin 90°}{\sin\lambda} = \frac{1}{\sin\lambda} \Rightarrow \cos\delta = \cos\alpha\,(\cos\alpha\cos\delta) + \sin\alpha\cos\varepsilon\cdot\frac{\sin\delta}{\sin\varepsilon};$$

$$\sin^2\alpha\cos\delta = \frac{\sin\alpha\sin\delta}{\tan\varepsilon} \Rightarrow \boxed{\sin\alpha = \frac{\tan\delta}{\tan\varepsilon}};$$

$$\cos\lambda = \cos\alpha\,(\cos\alpha\cos\lambda + \sin\alpha\sin\lambda\cos\varepsilon) \Rightarrow \cos\lambda\sin^2\alpha = \sin\alpha\cos\alpha\sin\lambda\cos\varepsilon\,;$$

$\cos\lambda\sin\alpha = \cos\alpha\sin\lambda\cos\varepsilon \Rightarrow \boxed{\tan\alpha = \tan\lambda\cos\varepsilon}$..(1 punct)

Folosind a doua formulă încadrată în chenar, se determină longitudinea ecliptică:

$$\tan\lambda = \frac{\tan 345°}{\cos 23°26'} = -0{,}292 \Rightarrow \lambda = 343{,}72°.$$

(Trebuie ținut cont și de faptul că α, λ se află în același cadran)..

Folosind prima formulă încadrată în chenar, se determină declinația Soarelui:

$\tan\delta = \sin 345°\tan 23°26' = -0{,}112 \Rightarrow \boxed{\delta = -6°24'}$...(1 punct)

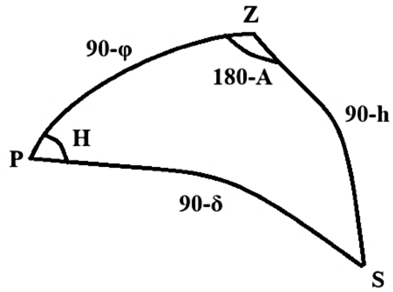
Regula de trei simplă ne va permite să găsim data calendaristică a observației:

$$\frac{360° - \lambda}{360°} = \frac{Nr}{365{,}25} \Rightarrow Nr = 365{,}25\,\frac{16{,}28°}{360°} \approx 16{,}5,$$

unde Nr reprezintă numărul de zile scurse de la echinocțiul de primăvară din 21 martie (i.e. când Soarele se află în punctul vernal, iar $\alpha, \delta, \lambda = 0°$). De aceea, putem estima că observarea a avut loc pe $\boxed{4\,martie}$..(1 punct)

b) Datorită refracției atmosferice, lumina care trece prin atmosferă se curbează într-o manieră care face ca obiectele aflate la orizont să apară ceva mai sus decât sunt în realitate. De aceea, înălțimea adevărată a Soarelui, la răsărit/apus este $h = -35'$......................(1 punct)

Pentru calculul azimutelor, ne vom folosi de triunghiul sferic standard, din figura de mai jos, împreună cu teorema sinusului și a cosinusului:



$$\sin h = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos H \Rightarrow \cos H = \frac{\sin h - \sin\varphi \sin\delta}{\cos\varphi \cos\delta};$$

$$\cos H = \frac{\sin -35' - \sin 47°38' \sin -6°24'}{\cos 47°38' \cos -6°24'} = 0{,}107 \Rightarrow H = \pm 83{,}81° = \pm 5^h 35^m 15^s;$$

Deducem că unghiurile orare sunt: $\boxed{H_{răsărit} = -5^h 35^m 15^s, H_{apus} = 5^h 35^m 15^s}$.................(1 puncte)

$$\frac{\sin A}{\cos\delta} = \frac{\sin H}{\cos h} \Rightarrow \sin A = \frac{\sin H \cos\delta}{\cos h} = \frac{\sin \pm 83{,}81° \cos -6°24'}{\cos -35'} = \pm 0{,}988 \Rightarrow A = \pm 81{,}11°.$$

Deducem că azimutele sunt: $\boxed{A_{răsărit} = -81{,}11°, A_{apus} = 81{,}11°}$.......................................(1 puncte)

c) Formula pentru timpul local este: $t = H + 12^h - \lambda + \eta + n_f$, unde $n_f = 2^h$ reprezintă numărul de fuse orare (data de 4 martie calculată anterior arată că suntem cu ora de iarnă), deci: $t = H + 12^h - 26°15' + 10^m + 2^h = H + 12^h 25^m$..(3 puncte)

Astfel, $t_{răsărit} = H_{răsărit} + 12^h 5^m = \boxed{6^h 49^m 45^s}$; $t_{apus} = H_{apus} + 12^h 5^m = \boxed{18^h 0^m 15^s}$......(2 puncte)

III.2. Astronauți pe Marte (8 puncte)

Un grup de astronauți ajunși pe planeta Marte își propun să lanseze dispozitive și aparate în vederea realizării unor observații și măsurători:

A. **(2 puncte)** Se lansează un proiectil sub un anumit unghi de înclinare față de orizontală, pe direcția Ecuatorului, neglijând frecarea cu aerul și eventualele forme de relief. Proiectilul descrie o semielipsă cu semiaxa mare egală cu raza planetei Marte. Să se determine: a)unghiul de înclinare ϕ sub care a fost lansat, dacă s-a ridicat la o înălțime egală cu y_{max}; b)care a fost energia totală a sistemului proiectil-planetă, dacă proiectilul cu masa de *100kg*, a fost lansat cu prima viteză cosmică corespunzătoare planetei Marte ? c)care este distanța dintre punctele de lansare și de cădere a proiectilului față de suprafața planetei; d)excentricitatea elipsei;

Se cunosc: Constanta atracției universale $K = 6{,}67.10^{-11}\ Nm^2/kg^2$, masa $M_M = 6{,}421.10^{23}\ kg$ și raza $R_M = 3393\ km$ planetei Marte.

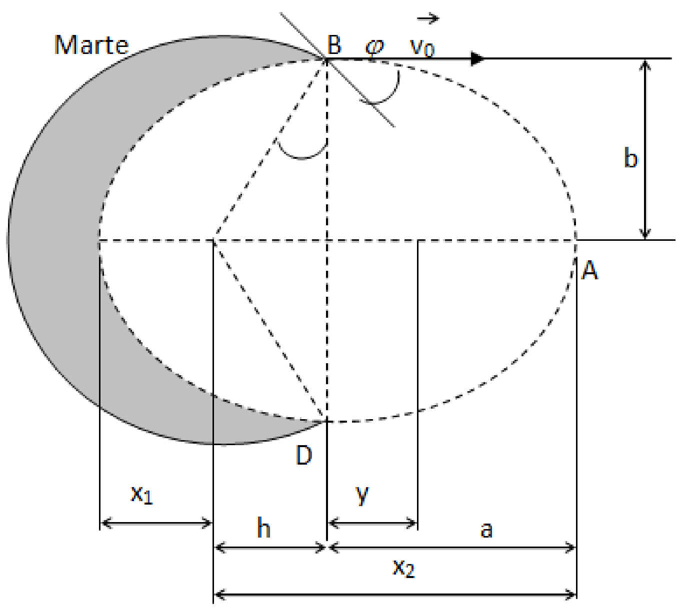
B. **(3 puncte)** Neglijând influența gravitațională a celorlalte corpuri cerești se lansează un satelit de la o înălțime minimă egală cu un sfert din semiaxa mare a traiectoriei sale. Planeta Marte se va afla într-unul din focarele elipsei descrise de satelit. Se știe că în jumătatea elipsei în a cărei focar se află planeta Marte, durata parcursului satelitului este de *0,5 ani* siderali tereștri.

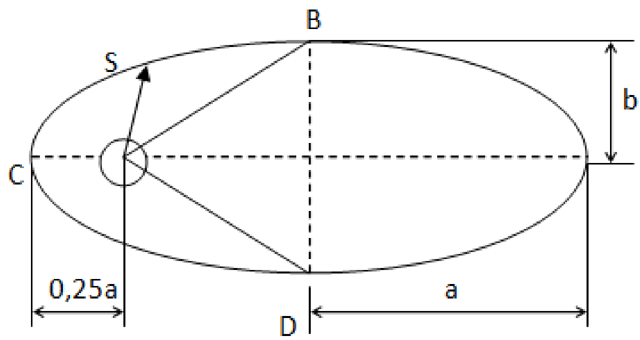
Să se determine: a) perioada mişcării de revoluție a satelitului în jurul planetei Marte; b) mărimea semiaxei mari a elipsei; c)semiaxa mică și viteza satelitului într-un vârf minor ale elipsei.

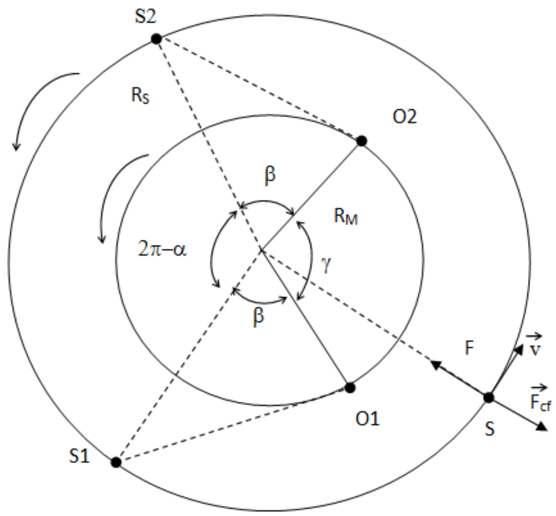
Se cunosc: Perioada de rotație a satelitului Deimos este *30h* iar raza orbitei sale este de *23500 Km*.

C. **(3 puncte)** Un satelit artificial este lansat pe o orbită circulară în direcția Ecuatorului planetei Marte, la o înălțime h egală cu de 4 ori raza planetei R_M. Să se determine: a)Perioada de rotație a satelitului. b)Distanța de la un observator aflat pe ecuatorul planetei la satelit în momentul când satelitul răsare. c)Timpul măsurat de observator, dintre răsăritul și apusul satelitului.

Se cunosc: $R_M=3393\ km$; $K=6,67.10^{-11}Nm^2/kg^2$;$T_M=24,623h$; $M_M=6,421.10^{23}\ kg$

Rezolvare	Punctaj
Desen:  	
a) $R-y=R\sin\varphi;\quad R=a;$ R= raza planetei Marte $y=a(1-\sin\varphi);\quad y_{\max}=a-y=a\sin\varphi=a\sin\varphi;\quad y_{\max}=\frac{a}{2};\ \sin\varphi=\frac{1}{2};$ $\varphi=30^0;$	0,5p
b)-Pentru a fi cooptat pe orbita închisă trebuie ca $E_C<E_P$ şi energia totală $E_{tot}<0$. -Dacă energia cinetică $E_C>E_P$ proiectilul nu poate fi cooptat pe o orbită stabilă, el evadează din câmpul gravitaţional al planetei Marte. $v_0=\sqrt{\frac{KM}{R}};\ E_{tot}=\frac{mv_0^2}{2}-\frac{kMm}{R}<0;\ E_{tot}=-\frac{kMm}{2R};\Rightarrow$ condiţia este îndeplinită, deoarece toate mărimile ce intervin sunt constante pozitive. $E_{tot}=-6,31123.10^{11}\ J=-6,31.10^5\ MJ.$	0,5p

c) $\cos\varphi = \frac{b}{R};\ b = R\frac{\sqrt{3}}{2};\ x_{\max} = 2b = R\sqrt{3};\ \ x_{\max} = 3393.1,73km = 5869,89km.$	0,5p
d) $R=a;\ \frac{x_1}{x_2} = \frac{a(1-e)}{a(1+e)};\ x_1 = a-h = \frac{a}{2};\ x_2 = y_{\max} + y + h = y_{\max} + a;\ \frac{x_1}{x_2} = \frac{1}{3};$ $\frac{1}{3} = \frac{a(1-e)}{a(1+e)}; e = \frac{1}{2} = 0,5.$	0,5p
B. Desen: a)  	
$\Delta A = \frac{1}{2}A_{elipsa} - A_{\Delta};\ A_{elipsa} = \pi ab;\ A_{\Delta} = \frac{b.0,75a}{2}.2 = 0,75ab;\ \Delta A = ab(\frac{\pi}{2} - 0,75);$	0,5p
b) Satelitul mătură arii egale în intervale de timp egale conform legii a II-a a lui Kepler, adică: $\frac{\Delta A}{\Delta T} = \frac{A_{elipsa}}{T};\ T = \frac{\pi ab.\Delta T}{ab(\frac{\pi}{2} - 0,75)} = 3,82.0,5ani \cong 1,92ani;$	0,5p
$\frac{T_{SM}^2}{a_{SM}^3} = \frac{T}{a^3};$ $T_{SM} = 30h = \frac{30}{24}.\frac{1}{365,25}ani = 0,00342ani;\ \frac{(0,00342ani)^2}{(23500km)^3} = \frac{(1,92ani)^2}{a^3};$ $a = 23500\sqrt[3]{\frac{1,92}{0,00342}}km \cong 193862km$	1p
c) $a^2 - (a - 0,25a)^2 = b^2;\ a^2 - (0,75a)^2 = b^2;$ $b^2 = 0,8a^2; b = a\sqrt{0,8} = 0,89.193862\ km; b = 172537,18km.$	0,5p
$v = \frac{2\pi a}{T} = \frac{2.3,14.193862km}{1,92an} = 634090,29\frac{km}{an} = \frac{634090,29km}{31557600s} = 0,2\frac{km}{s};$	0,5p
C.	

a) $\frac{KM_M m}{R_S^2} = m\omega^2 R_S ; \omega = \frac{2\pi}{T_S}$ $T_S = 2\pi\sqrt{\frac{R_S^3}{KM_M}} ; T_S = 18{,}62h$	1p
b) $d_{OS}^2 = 25R_M^2 - R_M^2 ; d_{OS} = 2\sqrt{6}R_M ; d_{OS} = 16622{,}237\,Km$	0,5p
c)-Dacă rotația satelitului se face în sensul de rotație al planetei în jurul axei proprii. Desen:  	0,5
$2\pi - \alpha = \gamma + 2\beta$ $\alpha = \frac{2\pi}{T_M} t_{dir} + 2\arccos\frac{R_M}{R_S};$ $(\frac{2\pi}{T_S} - \frac{2\pi}{T_M}) t_{dir} = 2\arccos\frac{R_M}{R_S};$ $t_{dir} = \frac{T_M T_S \arccos\frac{R_M}{R_S}}{\pi(T_M - T_S)} ; t_{dir} = 33{,}10h$	0,5p
-Dacă rotația satelitului se face în sensul invers rotației planetei în jurul axei, analog modelului anterior avem: $t_{inv} = \frac{T_M T_S \arccos\frac{R_M}{R_S}}{\pi(T_M + T_S)} ; t_{inv} = 4{,}59h$	0,5p
Total	**8p**

Analema (9 puncte)

1) Punctajul maxim se va acorda doar dacă atât definiția cat si diferența dintre cele doua concepte vor fi evidențiate de către elev.

   a) **(1 punct)** *Care este diferența dintre conceptul de soare adevărat si soarele aparent? Dar dintre soarele adevărat și cel mediu?*

   Răspuns:

   Soarele aparent reprezintă același lucru ca si soarele adevărat, ambele concepte referuindu-se la soarele real (cel fizic), iar poziția acestora fiind poziția actuala a soarelui fizic.

   Soarele mediu este un concept care idealizează soarele adevărat/aparent. Astfel, soarele mediu este un corp imaginar, care se mişca cu o viteza unghiulara constanta in planul ecuatorului, pe când soarele adevărat/aparent își efectuează mișcarea in planul eclipticii.

   b) **(1 punct)** *Care este diferența dintre conceptul de timp solar și timp solar mediu? Exprima diferența acestora in funcție de η – ecuația timpului?*

   Răspuns:

   Fie H – unghiul orar

   Timpul solar este timpul local calculat cu ajutorul soarelui adevărat: $T_{solar} =$ 12h + $H_{soare\ adevarat}$

   Timpul solar mediu este timpul local calculat cu ajutorul soarelui mediu: $T_{solar\ mediu} =$ 12h + $H_{soare\ mediu}$

   Astfel, observam ca diferența dintre cei doi timpi se rezuma la diferența dintre cei doi sori. Din definiția ecuației timpului, știm ca ea reprezintă diferența celor doi, astfel cantitatea dorita este chiar egala cu:

$$T_{solar\ mediu} - T_{solar} = \eta$$

   c) **(1 punct)** *Care este diferența dintre ziua siderala si ziua solara adevărata? Dar dintre ziua solara adevărata și cea solara medie?*

   Răspuns:

   Ziua siderala este definita ca timpul dintre doua culminații succesive ale unei stele, pentru același observator considerat staționar.

   Ziua solara adevărata este definita ca timpul dintre doua culminații succesive ale soarelui adevărat, pentru același observator considerat staționar.

Ziua solara medie este definita ca timpul dintre doua culminații succesive ale soarelui mediu, pentru același observator considerat staționar.

Diferența dintre ziua solara adevărată si ziua solara medie este cauzata de diferența dintre cele doua concepte de „soare”, fiecare având mișcări diferite cauzând durate diferite ale zilelor. Datorita faptului ca mișcarea aparenta a soarelui adevărat nu este idealizata, durata zilei solare adevărate nu este constanta.

Datorita faptului ca excentricitatea orbitei pământului este aproximativ $e = 0.017$*, de acum, in modelul nostru vom considera ca* $e = 0$*, considerând deci ca pământul va avea o mișcare uniforma pe orbita sa circulara in jurul soarelui.*

2) *Definim doua sisteme carteziene de axe OXYZ si OX'Y'Z', ale căror origine O este pământul. Vom spune ca planul XOY este cel in care se afla soarele mediu, iar X'O'Y' cel in care se afla soarele adevărat.*

   a) **(1 punct)** *Presupunând ca traiectoria rezultanta a fiecărui soare, in planul sau, pe parcursul unui an, este un cerc in jurul lui O, găsește raza acestuia.*

Răspuns:

Deoarece excentricitatea orbitei pământului este $e = 0$, raza orbitei pământului va fi aproximativ 1 UA.

Astfel, când vom face trecerea la sistemul de referință descris in problema, raza cercurilor pe care se vor roti cei doi sori va fi egala cu 1 UA, datorita faptului ca distanta dintre cele doua corpuri nu depinde de transformările dintre sistemele de coordonate (nerelativiste).

   b) **(1 punct)** *Vom presupune ca alegem sistemul de axe astfel încât* $1\ UA = 1\ unit$ *si ca axa comună a celor doua sisteme este (OX) = (OX'). Ce reprezintă aceasta axa? Ce reprezintă* ε *(unghiul dintre XOY si X'OY')?*

Răspuns:

Axa (OX) = (OX') reprezintă intersecția dintre planul ecuatorului si cel al eclipticii, aflate la unghiul $\varepsilon = 23.5°$. Ea reprezintă deci „linia nodurilor” pentru soarele adevărat fata de planul de referință al soarelui mediu, fiind lina care unește cele doua echinocții, de primăvara si de toamna.

c) **(1 punct)** *Folosind acest model, obține o formula pentru declinația soarelui adevărat δ_A și cea a soarelui mediu δ_A, la timpul t dupa ce a trecut prin nodul ascendent. (Se cunoaște ω_0 - viteza unghiulara a soarelui adevarat si ε -* unghiul dintre XOY si X'OY'*).*

Răspuns:

$$\overrightarrow{r_a}(t) = \cos(\omega_0 t)\,\vec{\imath'} + \sin(\omega_0 t)\,\vec{\jmath'} + 0\,\vec{k'}$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \delta_A(t)\right) = \sin\big(\delta_A(t)\big) = \frac{\overrightarrow{r_a}(t)\cdot\vec{k}}{|\overrightarrow{r_a}(t)|\cdot|\vec{k}|} = \overrightarrow{r_a}(t)\cdot\vec{k}$$

Putem scrie versorii sistemului OX'Y'Z' in funcție de versorii sistemului OXYZ, și obtinem:

$$\vec{\imath'} = \vec{\imath}$$
$$\vec{\jmath'} = \cos(e)\,\vec{\jmath} + \sin(\varepsilon)\vec{k}$$
$$\vec{k'} = -\sin(e)\,\vec{\jmath} + \cos(\varepsilon)\vec{k}$$

$$\rightarrow \overrightarrow{r_a}(t) = \cos(\omega_0 t)\,\vec{\imath} + \sin(\omega_0 t)\cos(\varepsilon)\vec{\jmath} + \sin(\omega_0 t)\sin(\varepsilon)\vec{k}$$

$$\rightarrow \delta_A(t) = \arcsin\big(\overrightarrow{r_a}(t)\cdot\vec{k}\big) = \arcsin\left(\sin(\omega_0 t)\sin(\varepsilon)\right)$$

Nota: Acest răspuns se poate obține si prin considerente geometrice. Astfel, se va acorda punctaj maxim atât timp cat rezultatul final este corect, iar argumentele aduse pe parcursul demonstrației sunt corecte.

d) **(1 punct)** Scrie formula lui $\overrightarrow{r_m}$ vectorul ce urmareste pozitia soarelui mediu si $\overrightarrow{r_{a_{xy}}}$ vectorul ce urmareste proiectia pozitiei soarelui adevarat in planul XOY in funcție de versorii sistemului OXYZ ($\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$), timpul t, ε (unghiul dintre XOY si X'OY') si ω_0 viteza unghiulară a soarelui adevărat.

Răspuns:

$$\overrightarrow{r_m}(t) = \cos(\omega_0 t)\,\vec{\imath} + \sin(\omega_0 t)\,\vec{\jmath} + 0\,\vec{k}$$

$$\overrightarrow{r_a}(t) = \cos(\omega_0 t)\,\vec{\imath} + \sin(\omega_0 t)\cos(e)\,\vec{\jmath} + \sin(\omega_0 t)\sin(\varepsilon)\,\vec{k}$$
$$\overrightarrow{r_{a_{xy}}}(t) = \cos(\omega_0 t)\,\vec{\imath} + \sin(\omega_0 t)\cos(\varepsilon)\vec{\jmath}$$

e) **(1 punct)** Obtine expresia unghiului α dintre $\overrightarrow{r_m}$ si $\overrightarrow{r_{a_{xy}}}$.

Răspuns:

$$\propto(t) = \arccos\left(\frac{\overrightarrow{r_m}(t)\cdot\overrightarrow{r_{a_{xy}}}(t)}{|\overrightarrow{r_m}(t)|\cdot\left|\overrightarrow{r_{a_{xy}}}(t)\right|}\right)$$

$$\propto(t) = \arccos\left(\frac{cos^2(\omega_0 t) + sin^2(\omega_0 t)\cos(\varepsilon)}{\sqrt{cos^2(\omega_0 t) + sin^2(\omega_0 t) cos^2(\varepsilon)}}\right)$$

f) **(1 punct)** Pentru a obține o diagrama a analemmei, ceea ce căutam de fapt este o funcție a unghiului α in funcție de δ_A. Pentru a termina problema, găseste functia $\alpha(\delta_A)$.

Răspuns:

$$\sin(\delta_A) = \sin(\omega_0 t)\sin(\varepsilon) \rightarrow \sin(\omega_0 t) = \frac{\sin(\delta_A(t))}{\sin(\varepsilon)}$$

$$\cos(\delta_A(t)) = \sqrt{1 - sin^2(\omega_0 t) cos^2(\varepsilon)}$$

$$\propto(t) = \arccos\left(\frac{cos^2(\omega_0 t) + sin^2(\omega_0 t)\cos(\varepsilon)}{\sqrt{cos^2(\omega_0 t) + sin^2(\omega_0 t)(1 - sin^2(\varepsilon))}}\right)$$

$$\propto(t) = \arccos\left(\frac{1 - sin^2(\omega_0 t)\big(1 - \cos(\varepsilon)\big)}{\sqrt{1 - sin^2(\omega_0 t) sin^2(\varepsilon)}}\right)$$

$$\propto(\delta_A) = \arccos\left(\frac{1 - \frac{\sin(\delta_A)}{\sin(\varepsilon)}\big(1 - \cos(\varepsilon)\big)}{\cos(\delta_A(t))}\right)$$