

Olimpiada de matematică
Etapa locală, 28.02.2015
Clasa a IX-a

Subiecte:

1. Să se determine $x \in \mathbb{N}^*$ care verifică relația $[\sqrt{x}] = \frac{2015 - x}{x}$, unde $[a]$ este partea întreagă a numărului a .
2. Să se determine valoarea de adevăr a propozițiilor:
 - a) În progresia aritmetică $(a_n)_{n \geq 1}$, $a_n = 2n + 1$, termenii care sunt pătrate perfecte au rangurile numere pare.
 - b) În progresia aritmetică $(a_n)_{n \geq 1}$, $a_n = 6n - 5$, termenii care sunt pătrate perfecte au rangurile numere impare.
 - c) Există progresii aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$, de numere naturale nenule, cu $a_1 = 2015$ și termenii pătrate perfecte pare au rang impar.
3. Fie $ABCD$ un pătrat, O intersecția diagonalelor și M un punct în interiorul său. Punctele P, Q, R, S sunt proiecțiile punctului M pe laturile $(AB), (BC), (CD)$ respectiv (DA) . Arătați că:
 - a) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4 \overrightarrow{MO}$.
 - b) $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{MR} + \overrightarrow{MS} = 2 \overrightarrow{MO}$.
4. Fie $ABCD$ un patrulater convex și $M \in (AD)$, $N \in (BC)$ astfel încât $AM = 2MD$ și $BN = 2NC$. Dacă P este un punct în plan cu proprietatea $\overrightarrow{MP} = 2 \overrightarrow{AB} + 4 \overrightarrow{DC}$, arătați că punctele M, N, P sunt coliniare.

*Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru 3 ore.
La fiecare subiect se acordă de la 0 la 7 puncte.*