OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 09.02.2013

Clasa a XII-a

Problema 1

Să se arate că:

a) $\ln(x+1)\le x,\ \forall\ x>-1$;

b) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \ln(tg\ x)\,dx \le \frac{1}{2}\ln 2-\frac{\pi}{12}$.

Problema 2

Fie $G=\{x\in \mathbb{C} \mid x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0\}$. Determinați a, b, c, d $\in \mathbb{R}$ astfel încât $(G,\cdot)$ să fie grup izomorf cu

$(\mathbf{Z}_4,+)$.

Problema 3

Considerăm $f:\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln(tg\ x)$ şi F o primitivă a sa. Să se arate că există $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}F(x)\in\mathbf{R}$

Problema 4

Fie $(G,\cdot)$ un grup cu proprietatea că $f,g: G\to G$, $f(x)=x^2$, $g(x)=x^{-2}$ sunt morfisme surjective . Să se arate că pentru $r\in\mathbb{N}$ fixat, mulțimea $G_r=\{x\in G \mid \exists\ n\in\mathbb{N}$ astfel încât $x^{r^n}=e\}$ este subgrup al lui G.

Probleme selectate de Prof. Sadoveanu Viorel

Str. Mihai Eminescu nr. 11, 410019, Oradea

Tel: +40 (0) 259 41 64 54,
Tel./fax: +40 (0) 359 43 62 07,
Fax: +40 (0) 259 41 80 16,
+40 (0) 259 47 02 22,
Web: www.isjbihor.ro
E-mail: isjbihor@yahoo.com

Notă: a) Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
b) Toate problemele sunt obligatorii.
c) Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.