



MINISTERUL
EDUCAȚIEI
NAȚIONALE



OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
16.02.2013
CLASA a V-a

SUBIECTUL I

Fie $A = \{3; 9; 15; \dots; 2013\}$.

- Arătați că $597 \in A$ și $727 \notin A$.
- Calculați suma elementelor din mulțimea A .
- Arătați că oricare ar fi n număr natural nenul, suma primelor n elemente din A , luate în ordine crescătoare, nu este pătrat perfect.

Dorel Băcănar

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

- Elementele mulțimii A sunt de forma $6k + 3$, $k \in \mathbb{N}$ 1 punct
 $597 = 6 \cdot 99 + 3 \Rightarrow 597 \in A$ 1 punct
 $727 = 6 \cdot 121 + 1 \Rightarrow 727 \notin A$ 1 punct
- $3 + 9 + 15 + \dots + 2013 = (6 \cdot 0 + 3) + (6 \cdot 1 + 3) + \dots + (6 \cdot 335 + 3) = 6 \cdot (1 + 2 + \dots + 335) + 3 \cdot 336 =$ 1 punct
 $= 6 \cdot 335 \cdot 336 : 2 + 1008 = 338688$ 1 punct
- Fie $S = (6 \cdot 0 + 3) + (6 \cdot 1 + 3) + \dots + [6 \cdot (n-1) + 3] = 6 \cdot (n-1) \cdot n : 2 + 3n = 3n^2$ 1 punct
 $S = 3n^2$
 $n^2 \text{ este pătrat perfect} \Bigg\} \Rightarrow S \text{ nu e pătrat perfect}$ 1 punct

SAU

- Elementele mulțimii A sunt de forma $3k$, $k \in \mathbb{N}^*$ 1 punct
 $597 = 3 \cdot 199 \Rightarrow 597 \in A$ 1 punct
 $727 = 3 \cdot 242 + 1 \Rightarrow 727 \notin A$ 1 punct
- $3 + 9 + 15 + \dots + 2013 = 3(1 + 3 + 5 + \dots + 671) =$ 1 punct
 $= 338688$ 1 punct
- Fie $S = 3[1 + 3 + 5 + \dots + (n-1)] = 3n^2$ 1 punct
 $S = 3n^2$
 $n^2 \text{ este pătrat perfect} \Bigg\} \Rightarrow S \text{ nu e pătrat perfect}$ 1 punct



MINISTERUL
EDUCAȚIEI
NAȚIONALE



OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
16.02.2013
CLASA a V-a

SUBIECTUL II

- a) Să se compare numerele 2^{497} cu 5^{213} .
b) Arătați că $10^{24} < 2^{80} < 10^{25}$.
c) Câte cifre are numărul $A = 2^{320} \cdot 5^{240}$?

Nicolae Stanciu și Titu Zvonaru, G.M.Nr.4/2012

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

- a) $2^{497} = 2^{7 \cdot 71} = (2^7)^{71} = 128^{71}$ 1 punct
 $5^{213} = 5^{3 \cdot 71} = (5^3)^{71} = 125^{71}$ 1 punct
Concluzie: $2^{497} > 5^{213}$ 1 punct

- b) $\left. \begin{aligned} 10^{24} &= 10^{3 \cdot 8} = (10^3)^8 = 1000^8 \\ 2^{80} &= 2^{10 \cdot 8} = (2^{10})^8 = 1024^8 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 10^{24} < 2^{80}$ 1 punct
 $\left. \begin{aligned} 2^{80} &= 2^{16 \cdot 5} = (2^{16})^5 = 65536^5 \\ 10^{25} &= 10^{5 \cdot 5} = (10^5)^5 = 10000^5 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2^{80} < 10^{25}$ 1 punct

- c) $A = 2^{320} \cdot 5^{240} = 2^{80} \cdot 2^{240} \cdot 5^{240} = 2^{80} \cdot 10^{240}$ 1 punct
Conform subpunctului a) $10^{24} < 2^{80} < 10^{25} \Rightarrow 10^{24} \cdot 10^{240} < 2^{80} \cdot 10^{240} < 10^{25} \cdot 10^{240}$
Avem $10^{264} < A < 10^{265}$, deci A are 265 cifre 1 punct

Observație:

- b) $2048 < 3625 \Rightarrow 2^{11} < 5^5 \Rightarrow (2^{11})^5 < (5^5)^5 \Rightarrow 2^{55} < 5^{25} \Rightarrow 2^{55} \cdot 2^{25} < 5^{25} \cdot 2^{25} \Rightarrow 2^{80} < 10^{25}$



MINISTERUL
EDUCAȚIEI
NAȚIONALE



OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
16.02.2013
CLASA a V-a

SUBIECTUL III

Pe o tablă, într-un tabel, sunt scrise inițial numerele 3;0;1;2, iar la fiecare pas, se mărește cu 4 cel mai mic număr scris la pasul anterior, ca în modelul de mai jos:

Numerele inițiale	3;	0;	1;	2;
Pasul 1	3;	4;	1;	2;
Pasul 2	3;	4;	5;	2;
Pasul 3				

- a) Determinați n , știind că la pasul n se scriu 4 numere care au suma egală cu 258.
b) După câți pași apare în tabel numărul 2013? Justificați.
c) După 2013 pași, câte numere scrise în a 4-a coloană a tabelului sunt pătrate perfecte? Justificați!

Ștefan Smărăndoiu

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

- a) Suma numerelor inițiale este 6

După fiecare pas suma numerelor este cu 4 mai mare decât suma numerelor anterioare 1 punct

După n pași suma noilor numere va fi $S = 6 + 4n$ 1 punct

$S = 258 \Rightarrow 4n + 6 = 258 \Rightarrow 4n = 252 \Rightarrow n = 63$ 1 punct

- b) La pasul p_i noul număr care apare este $i + 3$ 1 punct

$i + 3 = 2013 \Rightarrow i = 2010$, deci 2013 apare la pasul 2010 1 punct

- c) Pe coloana a 4-a apar doar numere de forma $4k + 2$, $k \in \mathbb{N}$ 1 punct

Deci nu există pătrate perfecte pe coloana a 4-a 1 punct

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
16.02.2013
CLASA a V-a

SUBIECTUL IV

Se dau mulțimile: $A = \{ \overline{abc} \mid \overline{abc} \text{ împărțite la } 35 \text{ dau restul } 10 \}$ și

$$B = \{ \overline{abc} \mid \overline{abc} : 5 \text{ și } \overline{abc} \text{ împărțite la } 7 \text{ dau restul } 3 \}.$$

- Determinați cel mai mic și, respectiv, cel mai mare element din mulțimea A .
- Demonstrați că $A = B$.
- Arătați că oricum am alege 16 elemente din A , există 2 elemente a căror diferență este divizibilă cu 11.

Cristina Pîrveuță

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

- $115 = 35 \cdot 3 + 10 \Rightarrow 115$ este cel mai mic element din mulțimea A 1 punct
 $990 = 35 \cdot 28 + 10 \Rightarrow 990$ este cel mai mare element din mulțimea A 1 punct
- $$\left. \begin{array}{l} \overline{abc} \in A \Rightarrow \overline{abc} = 35k + 10 = 5(7k + 2) : 5 \\ \overline{abc} \in A \Rightarrow \overline{abc} = 35k + 10 = 7(5k + 1) + 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \overline{abc} \in B \Rightarrow A \subseteq B$$
 1 punct

$$\text{Fie } \overline{abc} \in B \Rightarrow \overline{abc} = 5k \text{ și } \overline{abc} = 7p + 3 \Rightarrow 5k = 7p + 3 \Rightarrow 5k = 5p + 2p + 3 \Rightarrow (2p + 3) : 5$$

$$2p + 3 = 5t \Rightarrow 2p + 2 = 4t + t - 1 \Rightarrow (t - 1) : 2 \Rightarrow t = 2n + 1 \Rightarrow \overline{abc} = 35n + 10 \in A \Rightarrow B \subseteq A$$

 Cum $A \subseteq B$ și $B \subseteq A \Rightarrow A = B$ 1 punct
- Construim submulțimile $A_1 = \{35 \cdot 3 + 10\}, A_2 = \{35 \cdot 4 + 10\}, A_3 = \{35 \cdot 5 + 10\}, A_4 = \{35 \cdot 6 + 10\},$
 $A_5 = \{35 \cdot 7 + 10; 35 \cdot 18 + 10\}, A_6 = \{35 \cdot 8 + 10; 35 \cdot 19 + 10\}, \dots, A_{15} = \{35 \cdot 17 + 10; 35 \cdot 28 + 10\}$ 1 punct
 Aplicând principiul cutiei, printre cele 16 elemente vom găsi două elemente din mulțimea A_5 sau
 A_6 sau A_7 sau A_{15} 1 punct
 Diferența acestor două numere este divizibilă cu 11 1 punct

Comentariu

c) Inițial, cerința era, ca oricum am alege 16 elemente din A , există 2 elemente a căror sumă este eglă cu 2010.

Am schimbat “suma” cu “diferența”, dar în stresul timpului, nu mi - am dat seama că era suficient să arătăm că oricum am alege 12 elemente din A , există 2 elemente a căror diferență este divizibilă cu 11. **Astfel:**

Fie r , restul împărțirii unui număr natural la 11 $\Rightarrow r \in \{0; 1; 2; 3; \dots; 10\}$.

Conform **principiului cutiei**, oricum am alege 12 elemente din A , există cel puțin două elemente care dau același rest la împărțirea cu 11.

Fie $a = 11c + r$ și $b = 11t + r$ cele două numere, cu $a > b$. Atunci $a - b = 11(c - t) \Rightarrow (a - b) : 11$, ceea ce rezolvă cerința problemei.