

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ****30 ianuarie 2016****CLASA A IX-A**

- 1.) Dacă $x \in [-3, 1]$ și $x - 2y + 3 = 0$, calculați partea întreagă a expresiei

$$K = \sqrt{x^2 + y^2 + 6x + 9} + \sqrt{x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5}$$

- 2.) Se consideră șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ și relația $\frac{2n}{a_n} = \frac{n+1}{a_{n+1}} + \frac{n-1}{a_{n-1}}$ unde $a_1 = \frac{1}{3}$, $a_2 = \frac{3}{7}$.

a) Arătați că șirul $(x_n)_{n \geq 1}$, $x_n = \frac{n}{a_n}$ este o progresie aritmetică și determinați rația

progresiei, respectiv formula termenului general.

b) Determinați subșirul $(y_k)_{k \geq 0}$ al șirului $(x_n)_{n \geq 1}$, care are termenii numere întregi.

- 3.) a) Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{\{x\} - \{x\}^2}$, unde $\{x\}$ este partea fracționară a numărului real x .

Calculați suma: $f\left(-\frac{1}{2}\right) + f\left(-\frac{3}{2}\right) + f\left(-\frac{5}{2}\right) + \dots + f\left(-\frac{2015}{2}\right)$.

b) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\left[\sqrt{\frac{x+5}{3}}\right] = \frac{x+2}{3}$, unde cu $[a]$ s-a notat partea întreagă a numărului real a .

- 4.) În triunghiul ABC se consideră punctele $M \in [BC]$, $N \in [AC]$, $P \in [AB]$ astfel încât

$$\frac{BM}{MC} = \frac{CN}{NA} = \frac{AP}{PB}. \text{ Arătați că:}$$

a) cu segmentele AM , BN , CP se poate construi un triunghi.

b) Pentru orice punct O din planul triunghiului ABC are loc relația:

$$\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

c) centrele de greutate ale triunghiurilor ABC și MNP coincid.

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare problemă se punctează cu 10 puncte.

Timpe de lucru 3 ore