

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Faza locală

Braşov, 14 februarie 2025

Soluţii

Clasa a X-a

1. Aflaţi numărul natural $n \geq 2$ şi numerele reale pozitive $x_1, x_2, \dots, x_n$ ştiind că $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 3\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} - 1$ şi $n = \sqrt[n]{n+7} - 1$.

Gazeta Matematică, Supliment cu exerciţii

Soluţie.

$n = \sqrt[n]{n+7} - 1 \Leftrightarrow (n+1)^n = n+7$. Constatăm că $n=2$ verifică ecuaţia **2p**

Pentru $n \geq 3$, avem $(n+1)^n \geq (n+1)^3 \geq 16(n+1) > n+7$. Rezultă că $n=2$ este soluţia unică a ecuaţiei **2p**

$x_1 + x_2 = 3\sqrt[n]{x_1 x_2} - 1 \Leftrightarrow \frac{x_1 + x_2 + 1}{3} = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot 1} \Leftrightarrow x_1 = x_2 = 1$ **3p**

2. Fie $n > 1$ un număr natural şi numerele reale $a_1, a_2, \dots, a_n > 1$. Notăm $S = \sum_{k=1}^n a_k$.

Arătaţi că

$$\log_{a_1} \left(\frac{S - a_1}{n - 1} \right) + \log_{a_2} \left(\frac{S - a_2}{n - 1} \right) + \dots + \log_{a_n} \left(\frac{S - a_n}{n - 1} \right) \geq n$$

Diana Meleşteu

Soluţie.

Notăm $P = a_1 a_2 \dots a_n$. Fie $k \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Din inegalitatea mediilor, obţinem $\frac{S - a_k}{n - 1} \geq \sqrt[n-1]{\frac{P}{a_k}}$ **2p**

Cum $a_k > 1$, avem $\log_{a_k} \left(\frac{S - a_k}{n - 1} \right) \geq \log_{a_k} \left(\sqrt[n-1]{\frac{P}{a_k}} \right)$ **1p**

Apoi $\log_{a_k} \left(\sqrt[n-1]{\frac{P}{a_k}} \right) = \frac{1}{n - 1} \sum_{i \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{k\}} \log_{a_k} a_i$ **1p**

Rezultă

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \log_{a_k} \left(\frac{S - a_k}{n - 1} \right) &\geq \frac{1}{n - 1} \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{k\}} \log_{a_k} a_i \right) \\ &= \frac{1}{n - 1} \sum_{1 \leq i < k \leq n} (\log_{a_k} a_i + \log_{a_i} a_k). \end{aligned} \quad (1)$$

Din inegalitatea $\log_a b + \log_b a \geq 2, \forall a, b > 1$, obținem

$$\frac{1}{n-1} \sum_{1 \leq i < k \leq n} (\log_{a_k} a_i + \log_{a_i} a_k) \geq \frac{2C_n^2}{n-1} = n. \quad (2)$$

Inegalitatea din enunț rezultă prin tranzitivitate din inegalitățile (1) și (2) **3p**

3. Fie $a, b, c \in C^*$, cu proprietatea că $|a| = |b| = |c| = a + b + c$. Demonstrați că printre numerele a, b, c există două numere cu suma zero.

Romeo Ilie

Soluția 1.

Notăm $r = |a| = |b| = |c| = a + b + c$. Avem $r \in (0, \infty)$

$$r = \overline{a+b+c} = \frac{r^2}{a} + \frac{r^2}{b} + \frac{r^2}{c} = \frac{r^2(ab+bc+ca)}{abc}. \dots\dots\dots \mathbf{2p}$$

$$\text{Rezultă sistemul } \begin{cases} a+b+c=r \\ abc=r(ab+ac+bc) \end{cases}, \dots\dots\dots \mathbf{1p}$$

Obținem $abc = (a+b+c)(ab+ac+bc)$, de unde $(a+b)(b+c)(c+a) = 0$ **3p**

Rezultă $a+b=0$ sau $b+c=0$ sau $c+a=0$ **1p**

Soluția a 2-a, geometrică

Numerele complexe nenule a, b, c se reprezintă în planul complex prin punctele $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$, situate pe un cerc cu centru în origine **1p**

Ortocentrul H al triunghiului ABC are afixul $a+b+c$ **2p**

Din ipoteză rezultă că H aparține cercului circumscris triunghiului ABC (H este punctul de intersecție al cercului cu semiaxa reală pozitivă). Atunci triunghiul este dreptunghic **2p**

Deducem $H = A$ sau $H = B$ sau $H = C$, de unde $b+c=0$ sau $c+a=0$ sau $a+b=0$ **2p**

4. Fie $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ o funcție cu proprietatea că $f(f(x)) = x\sqrt{x}, \forall x \geq 0$. Demonstrați că $f(\sqrt[3]{x^2}) = \sqrt[3]{f^2(x)}, \forall x \geq 0$.

Romeo Ilie

Soluție.

Fie $g : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty), g(x) = x\sqrt{x}$. Funcția g este bijectivă, cu inversa

$$g^{-1} : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty), g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x^2}. \dots\dots\dots \mathbf{1p}$$

Conform ipotezei, $f \circ f = g$ **1p**

Compunerea funcțiilor este asociativă. **1p**

Avem $g \circ f = (f \circ f) \circ f = f \circ (f \circ f) = f \circ g$ **2p**

Rezultă $f \circ g^{-1} = g^{-1} \circ (g \circ f) \circ g^{-1} = g^{-1} \circ (f \circ g) \circ g^{-1} = g^{-1} \circ f$.

Astfel, relația din concluzie este demonstrată **2p**