



Olimpiada Națională de Matematică
Etapa locală, Iași
14.02.2014

CLASA a X-a

Problema 1.

Se consideră funcția: $f: \mathbb{C} \setminus \{-i\} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(x) = \frac{z-i}{z+i}$.

a) Arătați că $|f(z)| = 1 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$.

b) Se consideră șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cu $x_0 = 2$ și $x_{n+1} = f(x_n)$. Calculați $x_0 + x_1 + \dots + x_{2014}$.

Problema 2.

Rezolvați sistemul: $2014 \cdot \lg[x] + \{\lg y\} = 2014 \cdot \lg[y] + \{\lg z\} = 2014 \cdot \lg[z] + \{\lg x\} = 6$.

Problema 3.

Fie $m, n, p \in \mathbb{N}^*$. Dacă $4^{\frac{m}{n+p}} + 4^{\frac{n}{m+p}} + 4^{\frac{p}{n+m}} = 6$, arătați că $m = n = p$.

Problema 4.

a) Fie $a, b, c, d, \alpha \in \mathbb{C}$ cu $|a| = |b| \neq 0, |c| = |d| \neq 0$ și $\bar{a}b\alpha \notin \mathbb{R}$. Demonstrați că, pentru $n \geq 1$, rădăcinile ecuației $c(bx + a\alpha)^n - d(ax + b\bar{\alpha})^n = 0$ sunt numere reale.

b) Fie $A_1A_2\dots A_n$ un poligon regulat înscris într-un cerc de centru O și rază R . Pe semidreapta $[OA_1]$ se ia un punct P astfel încât $A_1 \in (OP)$. Demonstrați că $\prod_{k=1}^n PA_k = PO^n - R^n$.

Timp de lucru: 3 ore.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.