Clasa a V-a

1. Determinaţi numerele naturale nenule care împărţite la 71 dau restul egal cu cubul câtului şi arătaţi că suma lor se divide cu 81.

Barem:

1 p	Numerele sunt de forma $n = 71 \cdot c + r$, cu $r < 71$
1 p	$r = c^3$, deci $n = 71 \cdot c + c^3$, cu $c^3 < 71$
2 p	$c^3 < 71 \Rightarrow c \in \{1, 2, 3, 4\}$
2 p	$c = 1$, $n_1 = 71 \cdot 1 + 1 = 72$ $c = 2$, $n_2 = 71 \cdot 2 + 8 = 142 + 8 = 150$ $c = 3$, $n_3 = 71 \cdot 3 + 27 = 213 + 27 = 240$ $c = 4$, $n_4 = 71 \cdot 4 + 64 = 284 + 64 = 348$
1 p	$S = 72 + 150 + 240 + 348 = 810 = 81 \cdot 10 \Rightarrow S \vdots 81$
7 p	**TOTAL**

2. a) Determinaţi valoarea lui x din: $[200 – (64 + x\cdot 12 + 2\cdot 11)]\cdot(50 – 24\cdot 2 + 13\cdot 5 – 9\cdot 5) = 1980$

b) Calculaţi: $1 + 2 + 3 + \dots + 50 – 5\cdot\{[(12^2 + 5^2):13]^2 – 2^7 - 2^0 \}: 2^3$.

Barem:

0,5 p	$[200 - (64 + x\cdot 12 + 22)]\cdot 22 = 1980$
0,5 p	$200 - (64 + x\cdot 12 + 22) = 90$
1 p	$64 + x\cdot 12 + 22 = 110$
1 p	$x = 2$
1 p	b) $1 + 2 + 3 + ... + 50 = 50\cdot 51:2 = 25\cdot 51$
1 p	$\{[(144 + 25) : 13]^2 – 2^7 - 2^0\}: 2^3 = (13^2 – 2^7 – 2^0) : 2^3 =$
1 p	$(169 – 128 – 1) : 8 = 40 : 8 = 5$
1 p	$25\cdot 51 - 5\cdot 5 =$ $25\cdot(51 - 1) = 25\cdot 50 = 1250$
7 p	**TOTAL**

3. a) Determinaţi mulţimea D a divizorilor de trei cifre ai numărului 10^4.

b) Determinaţi cifrele a, b, c, d în sistemul de numeraţie zecimal, care verifică relaţia:

$$\overline{abc} \cdot (a + b + c + d) = 10^4.$$

Barem:

0,5 p	a) Avem $10^4 = 2^4 \cdot 5^4$
1,75 p	Divizorii de trei cifre sunt: $5^4 = 625$; $5^3 = 125$; $5^3 \cdot 2^2 = 500$; $5^3 \cdot 2 = 250$; $5^2 \cdot 2^2 = 100$; $5^2 \cdot 2^3 = 200$; $5^2 \cdot 2^4 = 400$
0,25 p	$D = \{100;\ 125;\ 200;\ 250;\ 400;\ 500;\ 625\}$
0,5 p	b) $\overline{abc} \cdot (a + b + c + d) = 10^4$ deci $\overline{abc}$ divide 10^4 adică $\overline{abc} \in D$ sau $(a + b + c + d) \mid 10^4$
0,5 p	Dacă $\overline{abc} = 100$; $100 \cdot (1 + 0 + 0 + d) = 10^4$ $1 + d = 10^2$ – imposibil
2 p	Dacă $\overline{abc} \in \{125; 200; 250; 400; 500\}$ relaţia din enunţ este imposibilă Dacă $(a + b + c + d) \in \{5,\ 10, 20, 25\}$ relaţia din enunţ este imposibilă
0,5 p	Dacă $\overline{abc} = 625$ avem: $625 \cdot (6 + 2 + 5 + d) = 10^4 \mid : 625$ $13 + d = 16 \Rightarrow d = 3$
1 p	Cifrele sunt: a = 6; b = 2; c = 5; d = 3
7 p	**TOTAL**

4. a) Arătaţi că $3^{2015} - 3^{2013}$ este cub perfect;

b) Scrieţi numărul 6^2 ca sumă de trei cuburi perfecte nenule;

c) Arătaţi că numărul $A = 6\cdot5^{3n} + 5^{3n+1} + 5^{3n+2}$ se poate scrie ca sumă de trei cuburi, oricare ar fi $n \in N$.

Barem:

1 p	a) $3^{2015} - 3^{2013} = 3^{2013}(3^2 - 1) = 3^{2013}\cdot 8$
0,5 p	$8 = 2^3$ şi $3^{2013} = 3^{3\cdot671} = (3^{671})^3$
0,5 p	$3^{2013}\cdot 8 = (3^{671})^3 \cdot 2^3 = (2\cdot 3^{671})^3$ – cub perfect
1 p	b) $6^2 = 36 = 1 + 8 + 27 = 1^3 + 2^3 + 3^3$
1 p	c) $A = 6\cdot5^{3n} + 5^{3n}\cdot5 + 5^{3n}\cdot5^2$
1 p	$= 5^{3n}(6 + 5 + 25)$ $= 5^{3n}\cdot36$
1 p	Ținând seama de b) avem: $A = 5^{3n}(1^3 + 2^3 + 3^3) =$
1 p	$= (5^n)^3 + (2\cdot5^n)^3 + (3\cdot5^n)^3$
7 p	**TOTAL**

Notă: Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.