

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Locală, 23 februarie 2020**BAREM** Clasa a VIII-a**Problema 1**

- a) Să se demonstreze că: $x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + 1 - x)(x^2 + 1 + x)$
- b) Să se aducă la forma cea mai simplă expresia:
 $E(x) = \left(\frac{1}{x(x-1)+1} - \frac{2(x+1)}{x^2(x^2+1)+1} \right) : \frac{x^2-x-1}{x^2+x+1}, x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \right\}$
- c) Să se demonstreze că $E(x) > 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \right\}$.
- d) a) Să se demonstreze că: $x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + 1 - x)(x^2 + 1 + x)$.

autor prof. Petre Monica

Soluție:

$$x^4 + x^2 + 1 = x^4 + 2x^2 - 2x^2 + x^2 + 1$$

.....1p

$$x^4 + 2x^2 - 2x^2 + x^2 + 1 = (x^4 + 2x^2 + 1) - 2x^2 + x^2 = (x^2 + 1)^2 - x^2 = (x^2 + 1 - x)(x^2 + 1 + x)$$

x1p

Orice altă demonstrație se punctează cu 2 p.

- b) Să se aducă la forma cea mai simplă expresia:

$$\left(\frac{1}{x(x-1)+1} - \frac{2(x+1)}{x^2(x^2+1)+1} \right) : \frac{x^2-x-1}{x^2+x+1} =$$

Soluție:

$$E(x) = \left(\frac{1}{x(x-1)+1} - \frac{2(x+1)}{x^2(x^2+1)+1} \right) : \frac{x^2-x-1}{x^2+x+1} = \left(\frac{x^2+x+1}{x^4+x^2+1} - \frac{2(x+1)}{x^4+x^2+1} \right) \cdot \frac{x^2+x+1}{x^2-x-1} = \dots\dots\dots 2p$$

$$E(x) = \frac{x^2-x-1}{(x^2-x+1)(x^2+x+1)} \cdot \frac{x^2+x+1}{x^2-x-1} = \frac{1}{x^2-x+1} \dots\dots\dots 1p$$

- c) Să se demonstreze că
- $E(x) > 0$
- , pentru x număr real

Soluție:

$$x^2 - x + 1 = x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} =$$

.....1p

$$x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} >$$

0.....1p

Problema 2Determinați numerele reale x, y, z, știind că $x + y + z = 1 - \sqrt{2}$ și

$$xy + yz + zx = 1 - \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

SOLUȚIE:

$$\begin{aligned} (x + y + z)^2 &= 3 - 2\sqrt{2} \dots\dots\dots 1p \\ (x + y + z)^2 &= 3 \cdot (xy + yz + zx) \dots\dots\dots 2p \\ x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx &= 0 \dots\dots\dots 1p \\ 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz - 2zx &= 0 \dots\dots\dots 1p \\ (x - y)^2 + (y - z)^2 + (x - z)^2 &= 0 \dots\dots\dots 1p \\ x = y = z &= \frac{1 - \sqrt{2}}{3} \dots\dots\dots 1p \end{aligned}$$

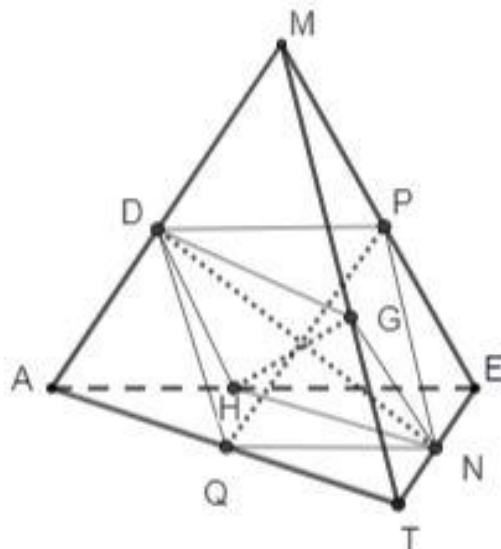
Problema 3

Fie tetraedrul regulat MATE. Fie punctele D, P, H, G, Q, N mijloacele muchiilor [AM], [ME], [AE], [MT], [AT], [TE] în această ordine.

- Să se demonstreze că $ME \perp AT$.
- Să se calculeze $\sin \angle (AMT), (PAT)$.
- Arătați că QP, DN și HG sunt concurente;
autor *prof. Petre Monica*
autor *prof. Caracostea Viorel*

SOLUȚIE:

- $\left. \begin{aligned} AT &\perp MQ \\ AT &\perp EQ \end{aligned} \right\} \Rightarrow AT \perp (MQE) \dots\dots\dots 1p$
 $\left. \begin{aligned} AT &\perp (MQE) \\ ME &\subset (MQE) \end{aligned} \right\} \Rightarrow AT \perp ME \dots\dots\dots 1p$
- $\triangle PAT - \text{isoscel} \Rightarrow PQ \perp AT \dots\dots\dots 0,5p$
 $m(\widehat{PAT}), (\widehat{AMT}) = m(\widehat{MQP}) \dots\dots\dots 0,5p$
 $\sin(\widehat{MQP}) = \frac{PM}{MQ} = \frac{\sqrt{3}}{3} \dots\dots\dots 1p$
- $\left. \begin{aligned} [DP] - \text{linie mijlocie în triunghiul AME} \\ [QN] - \text{linie mijlocie în triunghiul ATE} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$
 $DPNQ - \text{paralelogram} \dots\dots\dots 1p$
 $\left. \begin{aligned} [DH] - \text{linie mijlocie în triunghiul AME} \\ [GN] - \text{linie mijlocie în triunghiul MTE} \end{aligned} \right\} \Rightarrow DHNG - \text{paralelogram} \dots\dots\dots 1p$
 $[DN] - \text{diagonală comună} \Rightarrow \text{concurența diagonalelor} \dots\dots\dots 1p$



Problema 4

Pe planul trapezului ABCD cu $AB \parallel CD$, $AB > CD$ se ridică perpendiculara $AP = 6\sqrt{3}$ cm.
Știind că $m(\widehat{ADC}) = 120^\circ$, $m(\widehat{DAB}) = 2 \cdot m(\widehat{ABC})$, $AD = 4$ cm, iar AC este bisectoarea $\widehat{BAD}$ determinați:

- distanța de la punctul D la planul (PBC);
- sinusul unghiului format de dreptele PC și AB;

autor *prof. Caracostea Viorel*



SOLUȚIE:

a) Δ^{ADC} este isoscel deci $DC = 4\text{cm}$0,5p

$PS \perp BC$ 1p

Fie $DQ \perp PS$ demonstrați că $DQ \perp (PBC)$, deci

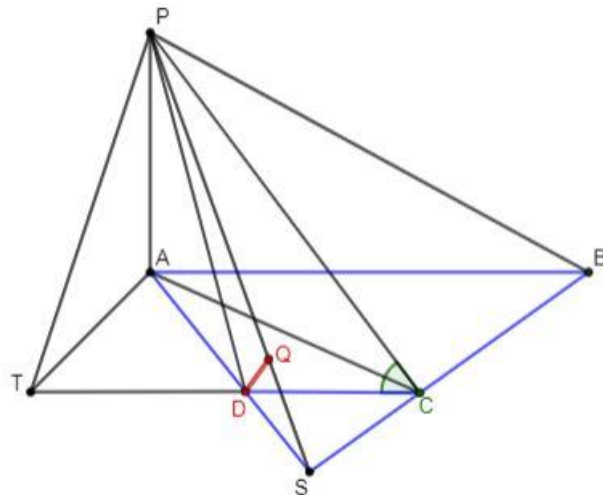
$d(D, (PBC)) = DQ$ 1p

$\Delta^{SQD} \sim \Delta^{SAP} \Leftrightarrow \frac{DQ}{PA} = \frac{DS}{PS}$1p

$DQ = \sqrt{3}$0.5p

b) $m(\widehat{PC, AB}) = m(\widehat{PC, DC})$ 0.5p

demonstrează că $PT \perp DC$0.5p



$PT = 2\sqrt{30}$0.5p

$A_{PDC} = 4\sqrt{30} = \frac{1}{2} \cdot PC \cdot DC \cdot \sin(\widehat{PDC})$1p

$\sin(\widehat{PDC}) = \frac{\sqrt{130}}{13}$