

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ, 17 FEBRUARIE 2018

CLASA a XII –a

SUBIECTE

1. Fie $I_n = \int_1^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^n \cdot \frac{1}{x} dx, n \in \mathbb{N}$. Să se arate că

$$2nI_n = 5 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} - 8(n-1)I_{n-2}, n \geq 2.$$

2. Determinați funcțiile $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile, cu derivata continuă, care admit o primitivă F , satisfăcând condițiile:

(i) $F(0) = F(1) = 0$;

(ii) $xf(x^2) = F(x)f'(x)$, pentru orice x din $[0,1]$.

3. Se consideră funcția $f: \left[0, \frac{1}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{1-2x}$ și operația definită prin

$$x * y = \frac{x+y-4xy}{1-4xy}, \quad \forall x, y \in \left[0, \frac{1}{2}\right).$$

a) Arătați că operația „ $*$ ” este lege de compoziție internă.

b) Știind că legea este asociativă și $f(x * y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$,

să se rezolve ecuația $\underbrace{x * x * \dots * x}_{\text{de } n \text{ ori}} = \frac{1}{n}, n \geq 3.$

4. Fie $(G_1, \circ), (G_2, \circ)$ două grupuri finite având m elemente, respectiv n elemente, cu

$(m, n) = 1$. Arătați că există un singur morfism de grup $f: G_1 \rightarrow G_2$, pe care să îl precizați.

Notă : Toate subiectele sunt obligatorii

Fiecare subiect este notat cu 0 -7 puncte

Timpul de lucru : 3 ore



INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN SĂLAJ

Loc. Zalău, str. Unirii, nr. 2, Cod 450059

Tel: 0260661391, Fax: 0260619190,

E-mail: isjsalaj@isj.sj.edu.ro



MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE