

Concurs de Matematică Aplicată „ADOLF HAIMOVICI”

Etapă Locală Dâmbovița

17-02-2019

Clasa a IX-a

**Filiera tehnologică: toate profilurile
BAREM DE CORECTARE**

1. Se consideră numărul real $a = \sqrt{7} + \sqrt{3}$. Să se calculeze $[a^2] + [a] + \left[\frac{4}{a}\right]$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x .

Rezolvare:

$$a^2 = 10 + 2\sqrt{21}, \frac{4}{a} = \sqrt{7} - \sqrt{3} \dots\dots\dots 2p$$

$$[a^2] = 19, [a] = 4, \left[\frac{4}{a}\right] = 0 \dots\dots\dots 4p$$

Finalizare..... 1p

2. Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n \geq 1}$. Știind că $a_3^2 + 49 + |13 - a_5| = 14a_3$, calculați suma primilor opt termeni ai progresiei.

Rezolvare:

$$(a_3 - 7)^2 + |13 - a_5| = 0 \dots\dots\dots 2p$$

$$a_3 = 7, a_5 = 13 \dots\dots\dots 2p$$

$$a_1 = 1, r = 3 \dots\dots\dots 2p$$

Finalizare..... 1p

3. Se consideră suma $S_n = \frac{1}{1 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 15} + \dots + \frac{1}{(7n-6)(7n+1)}$, pentru $n \in \mathbb{N}^+$.

a) Arătați că $S_n = \frac{n}{7n+1} \quad (\forall) n \in \mathbb{N}^+$;

b) Arătați că $S_1 + S_2 + \dots + S_{2019} < \frac{2019}{7}$.

Rezolvare:

a) metoda inducției matematice 3p

b) $S_k < \frac{1}{7} \quad (\forall) k \geq 1 \dots\dots\dots 2p$

Finalizare 2p

4. Dacă O este centrul cercului circumscris hexagonului regulat $ABCDEF$, să se determine numerele reale x și y știind că $\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD} + \vec{AE} + \vec{AF} = x \cdot \vec{AO}$ și $\vec{BD} + \vec{BF} = y \cdot \vec{BO}$.

Rezolvare:

$$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AO}, \quad \vec{AD} = 2 \cdot \vec{AO}, \quad \vec{AE} = \vec{AF} + \vec{AO}, \quad \vec{AB} + \vec{AF} = \vec{AO} \quad \dots \quad 2p$$

$$\begin{aligned} \vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD} + \vec{AE} + \vec{AF} &= \vec{AB} + (\vec{AB} + \vec{AO}) + 2 \vec{AO} + (\vec{AF} + \vec{AO}) + \vec{AF} = \\ &= 4 \vec{AO} + 2(\vec{AB} + \vec{AF}) = 4 \vec{AO} + 2 \vec{AO} = 6 \vec{AO} \quad \dots \quad 1p \end{aligned}$$

$$\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD} + \vec{AE} + \vec{AF} = x \cdot \vec{AO} \Leftrightarrow x \cdot \vec{AO} = 6 \cdot \vec{AO} \Leftrightarrow x = 6 \quad \dots \quad 1p$$

$$\vec{BD} + \vec{BF} = (\vec{BC} + \vec{BO}) + (\vec{BO} + \vec{BA}) = 2 \vec{BO} + (\vec{BC} + \vec{BA}) = 2 \vec{BO} + \vec{BO} = 3 \vec{BO} \quad \dots \quad 2p$$

$$\vec{BD} + \vec{BF} = y \cdot \vec{BO} \Leftrightarrow 3 \cdot \vec{BO} = y \cdot \vec{BO} \Leftrightarrow y = 3 \quad \dots \quad 1p$$