INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN SĂLAJ
Loc. Zalău, str. Simion Oros, nr. 2, Cod 450059
Tel: 0260661391, Fax: 0260619190,
E-mail:secretariat@isjsalaj.ro

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală , SĂLAJ , 10.02.2024

Clasa a VIII-a

BAREM DE CORECTARE

Subiectul 1

Pentru *n* număr natural, definim mulțimea $A_n = \{x \in \mathbf{R} \mid |x+n-6| \le 3n+4\}$.

(4p) a) Scrieți mulțimea A_1 sub formă de interval;

(3p) b) Aflați numărul natural *n* pentru care A_n conține exact 609 numere întregi.

Barem de corectare:

a) $A_1 = \{x \in \mathbf{R} \mid |x+1-6| \le 3+4\}$ 1p

$|x-5| \le 7 \iff -7 \le x-5 \le 7$ 1p

$\Rightarrow x \in [-2; 12]$ 1p

$\Rightarrow A_1 = [-2; 12]$ 1p

b) $|x+n-6| \le 3n+4 \iff -3n-4 \le x+n-6 \le 3n+4 \Rightarrow A_n = [-4n+2; 2n+10]$ 1p

$\Rightarrow$ 2n+10-(-4n+2-1)=609 .... 1p

$\Rightarrow$ n=100 .... 1p

Subiectul 2

(3p) a) Demonstrați că, dacă $x \in [-2, \infty)$ și $y \in [-2, \infty)$, atunci numărul $A = xy+2x+2y$ aparține intervalului $[-4, \infty)$.

(4p) b) Demonstrați că, oricare ar fi $a,b,c \in (0,\infty)$, are loc inegalitatea

$$(a^2+a+1)(b^2+b+1)(c^2+c+1) \ge 27abc.$$

Barem de corectare:

a) $x \ge -2$ și $y \ge -2$ de unde se obține $x+2 \ge 0$ și $y+2 \ge 0$..1p

$(x+2)(y+2) \ge 0$ de unde $xy+2x+2y+4 \ge 0$..1p

$xy+2x+2y \ge -4$ de unde A aparține intervalului $[-4, \infty)$..1p b)

$$a+\frac{1}{a}\geq 2 \Leftrightarrow a+\frac{1}{a}+1\geq 3 \Leftrightarrow \frac{a^2+a+1}{a}\geq 3 \Leftrightarrow a^2+a+1\geq 3a$$ ………… 2p

Analog obținem $b^2+b+1\geq 3b$ și $c^2+c+1\geq 3c$ ……………………………………… 1p

Prin înmulțirea celor trei relații obținem concluzia dorită …………………………………… 1p

Subiectul 3

În tetraedrul regulat $SABC$ se consideră punctul D pe muchia SB și punctul E pe muchia SC, astfel încât $\frac{SD}{DB}=\frac{1}{2}$ și $\frac{SE}{EC}=2$. Dacă aria triunghiului ADE este egală cu $5\sqrt{3}cm^2$, aflați suma muchiilor tetraedrului.

Barem de corectare:

Din $\frac{SD}{DB}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{SD}{SB}=\frac{1}{3}\Rightarrow SD=\frac{SB}{3}$

Din $\frac{SE}{EC}=2\Rightarrow\frac{SC}{EC}=3\Rightarrow EC=\frac{SC}{3}$.

Cum $SB=SC\Rightarrow SD=EC$...1p

Din $SA=AC, SD=CE$ și $\measuredangle ASD=\measuredangle ACE=60^\circ \xRightarrow{L.U.L.} \Delta ASD\equiv\Delta ACE\Rightarrow AD=AE$...............1p

Notăm cu x lungimea muchiei tetraedrului și cu M mijlocul lui $[SB]$.

AM mediană în triunghiul ΔSAB echilateral $\Rightarrow AM$- înălțime, $AM=\frac{x\sqrt{3}}{2}$ 1p

Aplicăm teorema lui Pitagora în $\Delta ADM\Rightarrow AD=\frac{x\sqrt{7}}{3}\Rightarrow AE=\frac{x\sqrt{7}}{3}$

Fie N mijlocul segmentului $[DE]$. Cum ΔADE este isoscel $\Rightarrow AN-$ înălțime.............................1p

În ΔSCM avem $\frac{SE}{SC}=\frac{2}{3}=\frac{SD}{SM}\xRightarrow{R.T.Thales} DE\parallel MC\Rightarrow\Delta SDE\sim\Delta SMC\Rightarrow DE=\frac{x\sqrt{3}}{3}.DN=\frac{x\sqrt{3}}{6}$....1p

Din $\Delta DAN\ (\measuredangle N)=90^\circ\Rightarrow AN=\frac{5x}{6}$

$A_{\Delta ADE}=\frac{DE\cdot AN}{2}=\frac{\frac{x\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{5x}{6}}{2}=\frac{5\sqrt{3}\cdot x^2}{36}$ 1p

Din $A_{\Delta ADE}=5\sqrt{3}\Rightarrow x^2=36\Rightarrow x=6$.

Suma muchiilor este egală cu $36\ cm$...1p

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN SĂLAJ
Loc. Zalău, str. Simion Oros, nr. 2, Cod 450059
Tel: 0260661391, Fax: 0260619190,
E-mail:secretariat@isjsalaj.ro

Subiectul 4

Considerăm cubul $ABCDA'B'C'D'$ și punctul P situat pe diagonala BD' astfel încât $BD' = 3BP$. Notăm cu O centrul feței $BB'C'C$.

(3p) a) Arătați că punctele A, P și O sunt coliniare;

(4p) b) Dacă $AB = 6\ cm$, calculați distanța de la punctul C la planul (APB).

Barem de corectare:

a) Fie $\{R\} = AC' \cap BD' \Rightarrow BR$ mediană în $\Delta\ ABC'$…………………………………......….1p

$BD' = 3BP \Rightarrow BR = \frac{3}{2}BP \Rightarrow BP = \frac{2}{3}BR$ de unde P este centrul de greutate al $\Delta\ ABC'$…...…..…..1p

O centru feței $BB'C'C \Rightarrow AO$ mediană în $\Delta\ ABC'$, de unde $P \in AO \Rightarrow A$, P și O coliniare………1p

b) A, P, O coliniare $\Rightarrow (APB) = (AOB) = (ABC')$……………………………………...…1p

$BB'C'C$ pătrat $\Rightarrow B'C \perp BC' \Rightarrow CO \perp BC'$……………………………………………………..…1p

$AB \perp (BCC')$, $CO \subset (BCC') \Rightarrow AB \perp CO$, $BC', AB \subset (ABC')$ și cum $BC' \cap AB = \{B\}$, rezultă că $CO \perp (ABC')$ și deci că distanța de la punctul C la planul (ABC') este CO, iar cum $(APB) = (ABC')$ $\Rightarrow$ distanța de la punctul C la planul (APB) este CO ……………………………………………..1p

$CO = \frac{B'C}{2} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$cm……………………………………………………………….…..1p