



OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 19 februarie 2017

Clasa a XII - a

SUBIECTUL I (7p)

Fie $\varepsilon = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ și legea "*" definită pe C prin $z_1 * z_2 = z_1 z_2 + \varepsilon z_1 + \varepsilon z_2 - 1$.

- Demonstrați că $(C - \{\varepsilon\}, *)$ este grup comutativ.
- Fie A punctul de afix $-\varepsilon$ și H mulțimea afixelor punctelor din planul complex situate pe cercul cu centrul în A și rază 1. Arătați că H este subgrup al grupului de la a).

SUBIECTUL II (7p)

Fie $G = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} / a, b \in C, A^{2017} = I_2 \right\}$.

- Demonstrați că G este parte stabilă a lui $M_2(C)$ în raport cu înmulțirea matricelor.
- Demonstrați că $(G, \cdot)$ este grup abelian.
- Câte elemente are grupul $(G, \cdot)$.

SUBIECTUL III (7p)

- Calculați $\int (x+1)^2 e^{x-\frac{1}{x}} dx, x \in (0, \infty)$.
- Calculați $\int \frac{x^2+1}{x^4+1} dx, x \in R$.

SUBIECTUL IV (7p)

Calculați $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_0^x \frac{1}{2+\cos t} dt$.

NOTĂ: Timp de lucru – 3 ore