

INSPECTORATUL SCOLAR JUDETEAN MURES
S.S.M.R - FILIALA MURES
Olimpiada de matematică- Faza locală, 14.02.2014
Clasa a IX-a
Barem de evaluare

Problema 1:

Calculați: $\left[\frac{1^2}{2}\right] + 2^1 \cdot \left[\frac{2^2}{3}\right] + 2^2 \cdot \left[\frac{3^2}{4}\right] + \dots + 2^{n-1} \cdot \left[\frac{n^2}{n+1}\right]$.

Soluție:

$$n-1 < \frac{n^2}{n+1} < n \dots\dots\dots(2p)$$

$$\Rightarrow \left[\frac{n^2}{n+1}\right] = n-1 \dots\dots\dots(1p)$$

$$S = \sum_{k=1}^n 2^{k-1}(k-1) = \sum_{k=1}^n k \cdot 2^{k-1} - \sum_{k=1}^n 2^{k-1} = S_1 - S_2 = n \cdot 2^n - 2^n + 1 - (2^n - 1) = n \cdot 2^n - 2^{n+1} + 2 \dots\dots\dots(2p)$$

Unde am utilizat calculul:

$$S_1 = 1 + 2 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^2 + \dots + n \cdot 2^{n-1} \Rightarrow$$

$$2S_1 = 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \dots + n \cdot 2^n \Rightarrow$$

$$S_1 - 2S_1 = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} - n \cdot 2^n = 2^n - 1 - n \cdot 2^n \dots\dots\dots(2p)$$

Problema 2

Se consideră triunghiul ABC oarecare. Se duc : mediana AL corespunzătoare laturii $[BC]$, bisectoarea LE a unghiului $\widehat{ALC}$, bisectoarea LF a unghiului $\widehat{ALB}$. ($E \in AC, F \in AB$) Notăm $EF \cap AL = \{M\}$. Demonstrați că oricare ar fi punctul O din plan avem : $2 \cdot \overline{OM} = \overline{OE} + \overline{OF}$.

Soluție:

Din teorema bisectoarei rezultă: $\frac{AF}{FB} = \frac{AL}{BL}$ și $\frac{AE}{EC} = \frac{AL}{LC}$ (1p)

De unde $\frac{AF}{FB} = \frac{AE}{EC} = k \Rightarrow FE \parallel BC \Rightarrow \frac{AM}{ML} = k$ (2p)

$$\frac{AE}{EC} = k \text{ implică } \overline{OE} = \frac{1}{1+k} \cdot \overline{OA} + \frac{k}{1+k} \cdot \overline{OC}$$

$$\frac{AF}{FB} = k \text{ implică } \overline{OF} = \frac{1}{1+k} \cdot \overline{OA} + \frac{k}{1+k} \cdot \overline{OB} \quad (2p)$$

$$\overline{OE} + \overline{OF} = \frac{2}{1+k} \cdot \overline{OA} + \frac{k}{1+k} \cdot (\overline{OC} + \overline{OB}) = \frac{2}{1+k} \cdot \overline{OA} + \frac{k}{1+k} \cdot 2 \cdot \overline{OL} = 2 \left(\frac{1}{1+k} \cdot \overline{OA} + \frac{k}{1+k} \cdot \overline{OL} \right) = 2 \cdot \overline{OM}. \quad (2p)$$

Problema 3

Se consideră numerele reale a, b, c diferite de -1 cu $abc=1$. Arătați că dacă $\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} = \frac{3}{2}$,

Atunci unul din numerele a, b, c este egal cu 1 .

Soluție:

$$2[(a+1)(b+1)+(b+1)(c+1)+(a+1)(c+1)]=3(a+1)(b+1)(c+1) \quad (1p)$$

$$2(bc+ac+ab)+4(a+b+c)+6=3(ab+ac+bc)+3(a+b+c)+6$$

$$ab+ac+bc=a+b+c \quad (2p)$$

$$ab-a-b+1-abc+ac+bc-c=0 \quad (1p)$$

$$a(b-1)-(b-1)-ac(b-1)+c(b-1)=0 \quad (1p)$$

$$(b-1)(a-1-ac+c)=0 \quad (1p)$$

$$(b-1)(a-1)(1-c)=0$$

$$\text{De unde rezultă concluzia.} \quad (1p)$$

NOTĂ: Orice altă rezolvare corectă se evaluează cu punctaj maxim.

Problema 4

Aflați $x > 1$ pentru care $\frac{1}{[x]} + \frac{1}{\{x\}} = 2014x$, unde $[x]$ înseamnă partea întreagă a lui x , iar $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a lui x .

Gazeta Matematica

Soluție:

Ecuția este echivalentă cu $\frac{\{x\} + [x]}{[x] \cdot \{x\}} = 2014x$. (2p)

Cum $\{x\} + [x] = x$ și $x > 1$ obținem $[x] \cdot \{x\} = \frac{1}{2014}$. (2p)

Dacă $[x] = n$, atunci $\{x\} = \frac{1}{2014n} < 1$. De aici $n > \frac{1}{2014}$, adică $n \geq 1$. (2p)

În concluzie, orice $x = n + \frac{1}{2014n}$, cu $n \in \mathbf{N}^*$ este soluție a ecuației. (1p)

NOTĂ: Orice altă rezolvare corectă se evaluează cu punctaj maxim.

INSPECTORATUL SCOLAR JUDETEAN MURES
S.S.M.R - FILIALA MURES
Olimpiada de matematică- Faza locală, 14.02.2014
Clasa a X-a
Barem de evaluare

Problema 1

Calculați suma $S = [\lg 1] + [\lg 2] + [\lg 3] + \dots + [\lg 10^{2014}]$.

Soluție:

Dacă $p \in \mathbb{N}$, atunci $[\lg k] = p \Leftrightarrow p \leq \lg k < p + 1$ 1p
 Suma este egală cu $S = 9 \cdot \sum_{p=0}^{2013} p \cdot 10^p + 2014$ 3p
 care în final este
 $S = \frac{10}{9} (2013 \cdot 10^{2014} - 2014 \cdot 10^{2013} + 1) + 2014$ 3p

Problema 2

Determinați funcțiile strict crescătoare $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea că:
 $f(xf(y)) = f(x)y, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Soluție:

Cum funcția este strict monotona rezulta ca este injectiva. 1p
 Pentru $x = y = 1$ obținem $f(1) = 1$ 1p
 Pentru $x = 1$ obținem. $f(f(y)) = y, \forall y \in \mathbb{R}$ 2p
 Dacă $a \in \mathbb{R}$ și $f(a) > a \Rightarrow f(f(a)) > f(a) \Rightarrow a > f(a)$, fals. ... 1p
 Dacă $a \in \mathbb{R}$ și $f(a) < a \Rightarrow f(f(a)) < f(a) \Rightarrow a < f(a)$, fals. 1p
 Rezulta $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$ 1p

Problema 3

Să se arate că triunghiul ABC este echilateral dacă și numai dacă:

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{2abc} + \cos A + \cos B + \cos C = 3.$$

Gazeta matematică

Soluție:

Dacă triunghiul este echilateral atunci

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{2abc} + \cos A + \cos B + \cos C = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 3. \text{2p}$$

Reciproc,

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{2abc} + \cos A + \cos B + \cos C = 3 \text{ implică } \frac{a^3 + b^3 + c^3}{2abc} + \sum \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = 3 \text{2p}$$

$$\text{De unde } \frac{a^3 + b^3 + c^3}{2abc} + \sum \frac{ab^2 + ac^2 - a^3}{2abc} = 3 \Rightarrow \sum \frac{ab^2 + ac^2}{2abc} = 3 \text{1p}$$

$$\Rightarrow ab^2 + ac^2 + ba^2 + bc^2 + ca^2 + cb^2 - 6abc = 0 \Rightarrow$$

$$a(b - c)^2 + b(a - c)^2 + c(b - a)^2 = 0 \Rightarrow \text{ 1p}$$

$$\Rightarrow a = b = c, \text{ deci triunghiul este echilateral1p}$$

Problema 4:

Fie $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ cu $\operatorname{Re} z_1 \geq 0$ și $\operatorname{Re} z_2 \geq 0$. Să se arate că $|z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1 \cdot z_2 + \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 \geq 0$.

Gazeta matematică

Soluție:

$$\text{Avem } |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1 \cdot z_2 + \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = z_1 \cdot \bar{z}_1 + z_2 \cdot \bar{z}_2 + z_1 \cdot z_2 + \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = \dots \text{2p}$$

$$(z_1 + \bar{z}_1) \cdot (z_2 + \bar{z}_2) + (z_1 - z_2) \cdot (\bar{z}_1 - \bar{z}_2) = \dots \text{3p}$$

$$= 4 \operatorname{Re} z_1 \cdot \operatorname{Re} z_2 + |z_1 - z_2|^2 \geq 0 \text{2p}$$

NOTĂ: Orice altă rezolvare corectă se evaluează cu punctaj maxim.

INSPECTORATUL SCOLAR JUDETEAN MURES
S.S.M.R - FILIALA MURES
Olimpiada de matematică- Faza locală, 14.02.2014
Clasa a XI-a
Barem de evaluare

Problema 1

Fie şirul $(x_n)_{n \geq 2}$ astfel încât $x_2 = 1$, $x_{n+1} = \frac{n^2}{n-1} \cdot x_n$, $n \geq 2$. Dacă $S_n = \sum_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k}\right) \cdot \frac{1}{x_k}$,
 să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$.

Soluție:

Se demonstrează că şirul $(x_n)_{n \geq 2}$ este pozitiv. (1p)

Avem: $x_2 = 1$, $x_3 = \frac{2^2}{1} \cdot x_2$,, $x_{n+1} = \frac{n^2}{n-1} \cdot x_n$ (1p)

Prin înmulțirea relațiilor se obține: $x_{n+1} = \frac{(n!)^2}{(n-1)!}$. (1p)

Deci: $x_{n+1} = n \cdot n!$, $\forall n \geq 2$. (1p)

Atunci $S_n = \sum_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k}\right) \cdot \frac{1}{x_k} = \sum_{k=2}^n \frac{k-1}{k} \cdot \frac{1}{(k-1)(k-1)!} = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} =$ (1p)

$= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} - 2$. (1p)

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = e - 2$. (1p)

Problema 2

Se consideră şirul de numere reale $(a_n)_{n \geq 0}$, definit prin:

$$a_0 = 0, a_1 = 1, 13^{a_n} = 12^{a_{n-1}} + 5^{a_{n-2}}, \forall n \geq 2.$$

Să se arate că şirul $(a_n)_{n \geq 0}$ este convergent și să se determine $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Soluție

$$a_0 = 0, a_1 = 1, 13^{a_2} = 12^{a_1} + 5^{a_0} \Rightarrow 13^{a_2} = 13 \Rightarrow a_2 = 1.$$

$$13^{a_3} = 12^{a_2} + 5^{a_1} \Rightarrow 13^{a_3} = 17 \Rightarrow a_3 = \log_{13} 17 > 1. \text{ Avem } a_0 < a_1 \leq a_2 < a_3. \quad (1p)$$

Presupunem că $a_{k-1} \leq a_k$, $\forall k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ și vom demonstra că $a_n \leq a_{n+1}$.

$$\text{Avem: } 13^{a_n} = 12^{a_{n-1}} + 5^{a_{n-2}}, 13^{a_{n+1}} = 12^{a_n} + 5^{a_{n-1}} \Rightarrow 13^{a_{n+1}} - 13^{a_n} = (12^{a_n} - 12^{a_{n-1}}) + (5^{a_{n-1}} - 5^{a_{n-2}}) \quad (1)(1p)$$

$$\text{Din ipoteza inducției avem: } a_{n-1} \leq a_n \Rightarrow 12^{a_{n-1}} \leq 12^{a_n} \Rightarrow 12^{a_n} - 12^{a_{n-1}} \geq 0 \quad (2)$$

$$a_{n-2} \leq a_{n-1} \Rightarrow 5^{a_{n-2}} \leq 5^{a_{n-1}} \Rightarrow 5^{a_{n-1}} - 5^{a_{n-2}} \geq 0 \quad (3)$$

$$\text{Din } (1), (2), (3) \Rightarrow 13^{a_{n+1}} - 13^{a_n} \geq 0 \Rightarrow 13^{a_{n+1}} \geq 13^{a_n} \Rightarrow a_{n+1} \geq a_n \Rightarrow \quad (2p)$$

şirul $(a_n)_{n \geq 0}$ este crescător $(*) \Rightarrow a_n \geq a_0$, $\forall n \in \mathbf{N} \Rightarrow a_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbf{N}$.

Avem $a_0, a_1, a_2, a_3 < 2$. Presupunem că $a_k < 2$, $\forall k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ și demonstrăm că $a_n < 2$.

$$13^{a_n} = 12^{a_{n-1}} + 5^{a_{n-2}} < 12^2 + 5^2 = 13^2 \Rightarrow a_n < 2.$$

Cum $0 \leq a_n < 2$, $\forall n \in \mathbf{N} \Rightarrow$ şirul $(a_n)_{n \geq 0}$ este mărginit $(**)$. (1p)

Din $(*)$ și $(**)$ $\Rightarrow (a_n)_{n \geq 0}$ este convergent $\Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in \mathbf{R}$. Trecem la limită în relația de

NOTĂ: Orice altă rezolvare corectă se evaluează cu punctaj maxim.

$$\text{recurență} \Rightarrow 13^a = 12^a + 5^a \Rightarrow \left(\frac{12}{13}\right)^a + \left(\frac{5}{13}\right)^a = 1 \quad (4). \quad (1p)$$

Se observă că $a = 2$ este soluție a ecuației (4). Funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(a) = \left(\frac{12}{13}\right)^a + \left(\frac{5}{13}\right)^a$ este strict crescătoare, deci injectivă, soluția găsită este unică. În concluzie $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$. (1p)

Problema 3

Fie $A \in M_n(\mathbf{R})$, unde n este impar. Să se arate că dacă $A^2 = O_n$, atunci oricare ar fi matricea $X \in M_n(\mathbf{R})$ cu proprietatea că $AX = XA$, au loc inegalitățile:

$$\det(XA + X^2) \geq 0 \geq \det(XA - X^2).$$

Soluție:

$$\det(XA + X^2) \cdot \det(XA - X^2) = \det(X) \cdot \det(A + X) \cdot \det(X) \cdot \det(A - X) = \quad (1p)$$

$$= (\det(X))^2 \cdot \det(A^2 - X^2) = (\det(X))^2 \cdot \det(-X^2) = \quad (1p)$$

$$= (-1)^n \cdot (\det(X))^4 \leq 0, \text{ deoarece } n \text{ este impar.} \quad (1p)$$

$$\text{Deci } \det(XA + X^2) \text{ și } \det(XA - X^2) \text{ sunt de semne contrare.} \quad (1) \quad (1p)$$

$$\text{Avem } \det(XA + X^2) = \det(A^2 + XA + X^2) = \det\left[\left(A + \frac{1}{2}X\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}X\right)^2\right] \geq 0. \quad (2) \quad (2p)$$

$$\text{Din (1) și (2) rezultă } \det(XA + X^2) \geq 0 \geq \det(XA - X^2). \quad (1p)$$

Problema 4. Fie șirul $(L_n)_{n \geq 1}$ dat prin $L_0 = 2$, $L_1 = 1$ și $L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$, $\forall n \in \mathbf{N}$.

a) Să se determine termenul general al șirul $(L_n)_{n \geq 1}$.

b) Demonstrați egalitatea $C_n^0 \cdot L_0^2 - C_n^1 \cdot L_1^2 + \dots + (-1)^n C_n^n \cdot L_n^2 = 2^{n+1} + (-1)^n L_n$. (G.M.)

Soluție:

a) Avem recurență liniară de ordinul doi cu ecuația caracteristică $r^2 = r + 1$, cu soluțiile $r_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

$$r_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \dots\dots\dots 1 \text{ punct, deci } L_n = Ar_1^n + Br_2^n \quad \forall n \in \mathbf{N} \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

$$\text{Din } L_0 = 2, L_1 = 1 \text{ obținem } L_n = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n \dots\dots\dots 2 \text{ puncte}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^k L_k^2 &= \sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^k \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^k + \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^k \right]^2 = \\ &= \sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^k \left[\left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)^k + \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)^k + 2(-1)^k \right] = \dots\dots\dots 1 \text{ punct} \\ &= \sum_{k=0}^n C_n^k \left(\frac{-3 - \sqrt{5}}{2}\right)^k + \sum_{k=0}^n C_n^k \left(\frac{-3 + \sqrt{5}}{2}\right)^k + 2 \sum_{k=0}^n C_n^k = \dots\dots\dots 1 \text{ punct} \\ &= \left(1 + \frac{-3 - \sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(1 + \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}\right)^n + 2^{n+1} = (-1)^n \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n + (-1)^n \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n + 2^{n+1} = \\ &= 2^{n+1} + (-1)^n L_n \dots\dots\dots 1 \text{ punct.} \end{aligned}$$

NOTĂ: Orice altă rezolvare corectă se evaluează cu punctaj maxim.

INSPECTORATUL SCOLAR JUDETEAN MURES
S.S.M.R - FILIALA MURES
Olimpiada de matematică- Faza locală, 14.02.2014
Clasa a XII-a
Barem de evaluare

Problema 1

Fie mulțimea $G = (k, \infty) \setminus \{k+1\}, k > 0$, pe care se definește legea $*$ astfel încât:

$$\log_a[(x * y) - k] = \log_a(x - k) \cdot \log_a(y - k), \forall x, y \in G, a > 0, a \neq 1.$$

- a) Să se determine numărul perechilor de numere întregi (k, a) pentru care elementul neutru al legii $*$ este $e = 2014$.
- b) Să se verifice dacă legea $*$ este asociativă și să se determine elementul $x \in G$ care verifică relația $x = x'$, în cazul $k=a+1=1005$. (s-a notat cu a' simetricul lui a în raport cu legea $*$).

Soluție:

Din calcul se obține: $x * y = k + (x - k)^{\log_a(y - k)}, x, y \in G$ 1punct

a) Din $e \in G$ element neutru se obține $x * e = e * x = x, (\forall) x \in G; x * e = x \Leftrightarrow k + (x - k)^{\log_a(e - k)} = x$

$$\Leftrightarrow (x - k)^{\log_a(e - k)} = x - k \Leftrightarrow \log_a(e - k) = 1 \Leftrightarrow e = k + a \in G \quad \dots\dots\dots 2\text{punct}$$

$$k + a = 2014, k, a \in \mathbb{Z}, k > 0, k \neq 2013 (e = 2014 \neq k + 1) \Rightarrow$$

$(k, a) \in \{(1, 2013), (2, 2012), (3, 2011), \dots, (2012, 1)\}$, în total 2012 perechi. 1punct

b) Se verifică asociativitatea pentru $k=1005, a=1004$ 1punct

$$x * x' = e \Leftrightarrow x' = k + a^{\frac{\log_a(e - k)}{\log_a(x - k)}} \in G \dots\dots\dots 1\text{punct}$$

Pentru $x = x'$ obținem $\log_{1004}^2(x - 1005) = 1 \Rightarrow \log_{1004}(x - 1005) = 1 \Rightarrow x_1 = 2009 \in G$ sau $\log_{1004}(x - 1005) = -1 \Rightarrow x_2 = 1005 + \frac{1}{1004} \in G \dots\dots\dots 1\text{punct}$

Problema 2.

Fie $f : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x} \cdot e^{-x}$. Să se determine primitiva F a lui f pentru care $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$.

Matlap

Soluție:

Integrăm prin părți.

$$u(x) = e^{-x} \cdot \cos x, u'(x) = -e^{-x} \cdot (\sin x + \cos x)$$

$$v'(x) = \frac{\cos x}{\sin^3 x}, v(x) = -\frac{1}{2\sin^2 x}. \quad \dots\dots\dots 2 \text{ puncte}$$

$$F(x) = -\frac{\cos x}{2\sin^2 x} \cdot e^{-x} - \frac{1}{2} \int \frac{e^{-x}}{\sin x} dx - \frac{1}{2} \int \frac{\cos x}{\sin^2 x} \cdot e^{-x} dx \quad \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

Fie $I = \int \frac{\cos x}{\sin^2 x} \cdot e^{-x} dx$. Integrăm prin părți

$$g(x) = e^{-x}, u'(x) = -e^{-x}, h'(x) = \frac{\cos x}{\sin^2 x}, h(x) = -\frac{1}{\sin x}.$$

$$\text{De unde } I = -\frac{e^{-x}}{\sin x} - \int \frac{e^{-x}}{\sin x} dx. \quad \dots\dots\dots 2 \text{ puncte}$$

$$\text{Deci } F(x) = -\frac{\cos x}{2\sin^2 x} \cdot e^{-x} - \frac{1}{2} \int \frac{e^{-x}}{\sin x} dx + \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{-x}}{\sin x} + \frac{1}{2} \int \frac{e^{-x}}{\sin x} dx = \frac{\sin x - \cos x}{2\sin^2 x} \cdot e^{-x} + C \text{ (1p)}$$

Folosind condiția $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ obținem $C = 0$.

NOTĂ: Orice altă rezolvare corectă se evaluează cu punctaj maxim.

Deci funcția căutată este $F(x) = \frac{\sin x - \cos x}{2 \sin^2 x} \cdot e^{-x}$ 1 punct

Problema 3

Pentru $a \in \mathbf{R}$ și $b \in \mathbf{R}^*$ considerăm funcția $f_{a+bi} : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$. $f_{a+bi}(x+iy) = x + (a+ib)y$ și notăm $G = \{f_{a+bi} | a \in \mathbf{R}, b \in \mathbf{R}^*\}$.

- a) Să se demonstreze că G este un grup necomutativ în raport cu compunerea funcțiilor.
 b) Considerăm și grupul $H = \{f_{a,b} | a \in \mathbf{R}^*, b \in \mathbf{R}\}$, unde $f_{a,b} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f_{a,b}(x) = ax + b$ și unde operația este de asemenea compunerea funcțiilor.

Să se demonstreze că aplicația $h : H \rightarrow G$, $h(f_{a,b}) = f_{\frac{b}{a} + \frac{1}{a}i}$ este un izomorfism de grupuri.

Soluție:

a)

$$\begin{aligned} - \text{Parte stabilă: } (f_{a+bi} \circ f_{c+di})(x+iy) &= f_{a+bi}(f_{c+di}(x+iy)) = f_{a+bi}(x+(c+di)y) = \\ &= f_{a+bi}(x+cy+dyi) = x+cy+(a+bi)dy = x+cy+(a+bi)dy = x+(c+ad+bdi)y = \\ &= f_{c+ad+bdi}(x+iy) \Rightarrow f_{a+bi} \circ f_{c+di} = f_{c+ad+bdi} \end{aligned}$$
1 punct

- Asociativitate

$$f_{a+bi} \circ f_{c+di} = f_{c+ad+bdi} \text{ și } f_{c+di} \circ f_{a+bi} = f_{a+cb+bdi} \text{ deci compunerea nu este comutativă. (1p)}$$

- Elementul neutru: f_i 1 punct

$$(f_{a+bi})^{-1} = f_{-\frac{a}{b} + \frac{1}{b}i}, \text{1 punct}$$

- deci $(G, \circ)$ grup necomutativ.

$$b) (f_{a,b} \circ f_{c,d})(x) = f_{a,b}(f_{c,d}(x)) = f_{a,b}(cx+d) = a(cx+d)+b = f_{ac,ad+b}(x) \text{1 punct}$$

$$h(f_{a,b} \circ f_{c,d}) = h(f_{ac,ad+b}) = f_{\frac{ad+b}{ac} + \frac{1}{ac}i} \text{ și } h(f_{a,b}) \circ h(f_{c,d}) = f_{\frac{b}{a} + \frac{1}{a}i} \circ f_{\frac{d}{c} + \frac{1}{c}i} = f_{\frac{d}{c} \cdot \frac{b}{a} + \frac{1}{ac}i}$$

deci h este morfism.1 punct

h este bijectiva $\Rightarrow h$ este bijectiva.1 punct

Problema 4

Să se determine funcția derivabilă $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ știind că $f'(x) = f(x) + \frac{f(x)}{x} + e^x$, pentru orice $x > 0$ și $f(1) = e$.

Gazeta Matematică

Soluție:

Fie funcția $g : (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $g(x) = \frac{f(x)}{x \cdot e^x} - \ln x$3 puncte

$$\text{Avem } g'(x) = \frac{x \cdot e^x f'(x) - (e^x + x \cdot e^x) f(x)}{(x \cdot e^x)^2} - \frac{1}{x} = \frac{f'(x) - \left(1 + \frac{1}{x}\right) f(x)}{x \cdot e^x} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = 0.$$

.....2 puncte

Deci g este constant. Cum $g(1) = \frac{f(1)}{e} = 1$, rezultă că $g(x) = 1$ pentru orice $x > 0$, deci

$$f(x) = (1 + \ln x) x e^x, x \in (0, \infty) \text{2 puncte}$$

NOTĂ: Orice altă rezolvare corectă se evaluează cu punctaj maxim.