



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală, 24 februarie -2019- Clasa a XII-a

- 1) Se consideră mulțimea $G = \left\{ A(k) = \begin{pmatrix} 2^k & 2^k \\ 2^k & 2^k \end{pmatrix} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$, și pentru fiecare $t \in \mathbb{Z}$ notăm cu $H_t = \{ A(k-t-1) \mid k \in \mathbb{Z} \}$. Se

admite cunoscut faptul că $(G, \cdot)$ este un grup, unde „ $\cdot$ ” este înmulțirea matricelor.

- a) Să se arate că pentru orice $n, p \in \mathbb{Z}$,

$$A(n) \cdot A(p) = A(n+p+1)$$

- b) Să se demonstreze că pentru orice $t \in \mathbb{Z}$, H_t este un subgrup al grupului $(G, \cdot)$.

- c) Să se demonstreze că grupurile $(G, \cdot)$ și $(\mathbb{Z}, +)$ sunt izomorfe.

- 2) Dacă G este un grup finit cu elementul neutru e și p este un număr natural nenul, notăm cu $G_p = \{ x \in G \mid x^p = e \}$.

- a) Arătați că, dacă p este impar, atunci G_p are un număr impar de elemente.

- b) Arătați că nu există un grup $(G, \cdot)$ astfel încât G_2 să aibă 3 elemente, dar există un grup $(G, \cdot)$ astfel încât G_2 să aibă 4 elemente.

- 3) a) Să se demonstreze că funcția

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad \text{admite primitive.}$$

- b) Dați exemplu de funcție care admite primitive și nu este integrabilă.

- c) Dați exemplu de funcție care este integrabilă și nu admite primitive.

- 4) Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție care este de două ori derivabilă și cu proprietățile:

$$f(0) = 0, f'(0) = 1 \text{ și } f''(x) + 2f'(x) + f(x) \geq 0 \quad (\forall) \quad x \in \mathbb{R}.$$

- a) Arătați că funcția $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin $F(x) = e^x f(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$ este convexă și $f(x) \geq x e^{-x}$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

- b) Arătați că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_0^1 x^n f(x) dx \geq \frac{(n+1)!}{e} \left(e - 1 - \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} - \dots - \frac{1}{(n+1)!} \right)$$

Notă : Toate subiectele sunt obligatorii

Fiecare subiect este notat dela 0 la 7 puncte .

