OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Faza locală
Braşov, 14 februarie 2025
Soluţii

Clasa a XII-a

1. Considerăm mulţimea $G = \{(a+b) + i(a-b) \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$.

   (a) Arătaţi că $2025 + i \in G$, dar $2024 + i \notin G$.

   (b) Arătaţi că G este parte stabilă a lui $\mathbb{C}$ în raport cu înmulţirea.

***

Soluţie.

(a) $2025 + i = (1013 + 1012) + i(1013 - 1012) \in G$ **2p**
Pentru oricare $a, b \in \mathbb{Z}$, numerele $a+b$ şi $a-b$ au aceeaşi paritate.
Rezultă $2024 + i \notin G$ **2p**

(b) Fie $c = (a+b) + i(a-b) \in G$ şi $z = (x+y) + i(x-y) \in G$, cu $a, b, x, y \in \mathbb{Z}$.
$cz = [(a+b)(x+y) - (a-b)(x-y)] + i[(a+b)(x-y) + (a-b)(x+y)] =$
$= (u+v) + i(u-v)$, unde $u = ax + ay + bx - by$ şi $v = -ax + ay + bx + by$.
Cum $u, v \in \mathbb{Z}$ rezultă $cz \in G$.
Prin urmare, G este parte stabilă a lui $\mathbb{C}$ în raport cu înmulţirea **3p**

2. Fie $(G, \cdot)$ un grup cu elementul neutru e. Dacă G are cel puţin trei elemente, arătaţi că există $a, b \in G \setminus \{e\}$, $a \neq b$, astfel încât $ab = ba$

Gazeta Matematică

Soluţie.
Cazul 1. Dacă $x^2 = e$, $\forall\, x \in G$, atunci G este un grup comutativ **2p**
Cum G are cel puţin trei elemente, $G \setminus \{e\}$ are cel putin două elemente.
Pentru oricare $a, b \in G \setminus \{e\}$, cu $a \neq b$, avem $ab = ba$ **2p**
Cazul 2. Presupunem că există $x \in G \setminus \{e\}$, astfel încât $x^2 \neq e$. **1p**
Alegem $a = x$ şi $b = x^2 \in G \setminus \{e\}$. Avem $ab = ba = x^3$ şi $a \neq b$. **2p**

3. Fie $m, n \in (1, \infty)$ şi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă pentru care $f(mx) = nf(x)$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, iar $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{m+n}$. Calculaţi $\int\limits_1^m f(x)\,\mathrm{d}x$.

Gazeta Matematică, Supliment cu exerciţii, enunţ modificat

Soluţie.

Cu schimbarea de variabilă $x = my$, obţinem $\int_0^m f(x)\,\mathrm{d}x = m\int_0^1 f(my)\,\mathrm{d}y$.
.... **3p**

Conform ipotezei, $m\int_0^1 f(my)\,\mathrm{d}y = mn\int_0^1 f(y)\,\mathrm{d}y = \dfrac{mn}{m+n}$.

Rezultă $\int_0^m f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{mn}{m+n}$. **2p**

Atunci $\int_1^m f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^m f(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{mn-1}{m+n}$. **2p**

Observaţie. Există funcţii care satisfac ipoteza.

Exemplu. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{\ln(mn)}{(m+n)\ln(m)}|x|^{\frac{\ln(n)}{\ln(m)}},\ \forall\, x \in \mathbb{R}$.

4. Fie $\alpha > 1$ şi $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ o funcţie continuă şi descrescătoare, cu proprietatea că $f^\alpha(x) \geq f(x^\alpha),\ \forall\, x \geq 0$. Demonstraţi inegalitatea:

$$\left(\int\limits_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)^\alpha \geq \int\limits_0^{x^\alpha} f(t)\,\mathrm{d}t,\ \forall\, x \geq 0.$$

Romeo Ilie

Soluţie.

Funcţia $F : [0, \infty) \to \mathbb{R},\ F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t,\ \forall\, x \geq 0$, este o primitivă funcţiei f.

Avem de demonstrat inegalitatea: $F^\alpha(x) \geq F(x^\alpha),\ \forall\, x \geq 0$ **1p**

Considerăm funcţia $G : [0, \infty) \to \mathbb{R},\ G(x) = F^\alpha(x) - F(x^\alpha),\ \forall\, x \geq 0$.

$G'(x) = \alpha\left[f(x)F^{\alpha-1}(x) - x^{\alpha-1}f(x^\alpha)\right],\ \forall\, x \geq 0$ **2p**

$f^\alpha(x) \geq f(x^\alpha),\ \forall\, x \geq 0$, deci $G'(x) \geq \alpha\left[f(x)F^{\alpha-1}(x) - x^{\alpha-1}f^\alpha(x)\right],\ \forall\, x \geq 0$.
.... **1p**

f descrescătoare, implică $F(x) \geq xf(x),\ \forall\, x \geq 0$ **2p**

Atunci, cum $\alpha > 1$, obţinem $G'(x) \geq \alpha f(x)\left[F^{\alpha-1}(x) - (xf(x))^{\alpha-1}\right] \geq 0,\ \forall\, x \geq 0$.

Deoarece $G(0) = 0$, rezultă că $G(x) \geq 0,\ \forall\, x \geq 0$.

Astfel, inegalitatea din enunţ este demonstrată. **1p**

Observaţie. Există funcţii neconstante care satisfac ipoteza, pentru oricare $\alpha > 1$.

Exemplu. $f : [0.\infty) \to [0, \infty),\ f(x) = \dfrac{2}{x+1},\ \forall\, x \geq 0$.