



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 16.02.2019

Clasa a IX – a

PROBLEMA 1. Fie $x, y, z > 0$ numere reale cu proprietatea $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 3$. Să se demonstreze inegalitățile următoare:

- a) $x + y + z \geq 3$;
- b) $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 + (z + 1)^2 \geq 12$.

PROBLEMA 2. Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ o progresie aritmetică cu rația pozitivă r și primul termen $a_1 \geq \frac{1}{2}$. Determinați partea întreagă a numărului

$$A = \sqrt{1 + \frac{r}{a_1 a_2}} + \sqrt{1 + \frac{r}{a_2 a_3}} + \cdots + \sqrt{1 + \frac{r}{a_n a_{n+1}}}, \quad n \geq 2.$$

PROBLEMA 3. Pe laturile triunghiului ABC se consideră punctele $A_1 \in (BC)$, $B_1 \in (CA)$ și $C_1 \in (AB)$, astfel încât AA_1 , BB_1 și CC_1 sunt concurente. Cercul circumscris triunghiului $A_1 B_1 C_1$ intersectează (a doua oară) BC , CA și AB , respectiv, în punctele A_2 , B_2 și C_2 . Arătați că:

- a) $AC_1 \cdot AC_2 = AB_1 \cdot AB_2$;
- b) dreptele AA_2 , BB_2 , CC_2 sunt concurente.

PROBLEMA 4. În patrulaterul convex $ABCD$ se notează cu G centrul de greutate al triunghiului BCD și cu H ortocentrul triunghiului ACD . Să se demonstreze că punctele A, B, G, H reprezintă, în această ordine, vârfurile unui paralelogram, dacă și numai dacă G este centrul cercului circumscris triunghiului ACD .

¹Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;

²Toate problemele sunt obligatorii;

³Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.