

**OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – CONSTANȚA, 08.02.2020****Barem - Clasa a X-a****SUBIECTUL I**

$$9^x + 40^x = 24^x + 25^x \Leftrightarrow 40^x - 24^x - (25^x - 9^x) = 0 \Leftrightarrow (5^x - 3^x)(8^x - 5^x - 3^x) = 0 \dots\dots\dots 4p$$

$$\text{Din } 5^x = 3^x \Rightarrow x = 0 \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Din } 5^x + 3^x = 8^x \Leftrightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^x + \left(\frac{3}{8}\right)^x = 1 \text{ și folosind faptul că membrul stâng reprezintă o funcție strict descrescătoare, deci injectivă, avem că } x = 1 \text{ este soluție unică} \dots\dots\dots 2p$$

SUBIECTUL II

$$\sqrt{(x+1)(x+2)} + \sqrt{7x+2} \cdot \sqrt{8x+4} + \sqrt{11x+6} \cdot \sqrt{12x+12} = \sqrt{(19x+9)(21x+18)} \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x+2} + \sqrt{7x+2} \cdot \sqrt{8x+4} + \sqrt{11x+6} \cdot \sqrt{12x+12} = \sqrt{19x+9} \cdot \sqrt{21x+18}$$

Este adevărată din condițiile de existență! 1p

Aplicăm CBS:

$$\left(\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x+2} + \sqrt{7x+2} \cdot \sqrt{8x+4} + \sqrt{11x+6} \cdot \sqrt{12x+12}\right)^2 \leq \dots\dots\dots 3p$$

$$\leq (x+1+7x+2+11x+6)(x+2+8x+4+12x+12) = (19x+9)(21x+18)$$

$$\text{Deci trebuie să avem egalitate } \Rightarrow \frac{x+1}{x+2} = \frac{7x+2}{8x+4} = \frac{11x+6}{12x+12} \dots\dots\dots 1p$$

De aici $x \in \{0, 4\}$ care verifică! 2p

SUBIECTUL III

$\Leftarrow$ Evident.....2p

$\Rightarrow$ Soluția 1

Presupunem prin reducere la absurd $z_1 \neq 0$ și $z_2 \neq 0$. Fie $A(z_1), B(z_2) \neq O(0)$. Bisectoarea unghiului opus la vârf lui $\angle AOB$ intersectează $C(O,1)$ în punctul $M(z)$. Atunci

$$m(\angle MOA) \geq 90^\circ, m(\angle MOB) \geq 90^\circ \Rightarrow MA \geq MO, MB \geq MO \Rightarrow |z - z_1| > 1, |z - z_2| > 1, \text{ fals}$$

$$\Rightarrow z_1 = 0 \text{ sau } z_2 = 0.$$

Dacă $z_2 = 0 \Rightarrow |z - z_1| \leq 0, (\forall) z \in \mathbb{C}, |z| = 1$. Dacă presupunem că $z_1 \neq 0 \Rightarrow A(z_1) \neq O(0) \Rightarrow$ semidreapta opusă lui (OA) intersectează $C(O,1)$ în $M(z) \Rightarrow O \in (AM) \Rightarrow MA > MO \Rightarrow |z - z_1| > 1$, fals, deci $z_1 = 0 \dots\dots\dots 5p$

Soluția 2

$$(z - z_1)(z - z_2) = z^2 - az + b, \text{ cu } z_1 + z_2 = a, z_1 z_2 = b. \text{ Dacă}$$

$$|z| = 1 \Rightarrow |-z| = 1 \Rightarrow \begin{cases} |z^2 - az + b| \leq 1 \\ |z^2 + az + b| \leq 1 \end{cases}, (\forall) z \in C(O,1) \Rightarrow$$

$$|z^2 - az + b| + |z^2 + az + b| \leq 2, \text{ dar } |2(z^2 + b)| \leq |z^2 - az + b| + |z^2 + az + b| \Rightarrow |z^2 + b| \leq 1, (\forall) z \in C(O,1).$$

Dar $\{z \in C \mid |z|=1\} = \{z^2 \mid |z|=1\}$ (dacă $|z|=1$, ecuația $u^2 = z$ are ca soluții rădăcini pătrate ale lui z deci $|u|=1$) iar de aici $\Rightarrow |z+b| \leq 1, (\forall) z \in C(O,1) \Rightarrow 2\operatorname{Re}(\bar{b} \cdot z) + |b|^2 \leq 0, \forall z \in C(O,1)$. Presupunem

prin absurd că $b \neq 0$ si pentru $z = \frac{|b|}{b} \Rightarrow 2\operatorname{Re}\left(\bar{b} \cdot \frac{|b|}{b}\right) + |b|^2 \leq 0$, fals $\Rightarrow b = 0$

$$\Rightarrow |z^2 - az| \leq 1, (\forall) z \in C(O,1) \Rightarrow |z-a| \leq 1, (\forall) z \in C(O,1) \Rightarrow a=0 \Rightarrow z_1 + z_2 = 0 = z_1 z_2 \Rightarrow z_1 = z_2 = 0 \dots 5p$$

SUBIECTUL IV

Presupunem că există funcțiile g și h

Cum f este bijectivă, este și inversabilă deci putem înlocui pe n cu $f^{-1}(n)$ și avem

$$n = g(f^{-1}(n))h(f^{-1}(n)), \forall n \in M$$

Notăm $G, H : M \rightarrow M, G = g \circ f^{-1}, H = h \circ f^{-1} \Rightarrow G(n)H(n) = n, \forall n \in M$

Cum g injectivă avem că G este injectivă și cum h este surjectivă, avem că H este surjectivă 3p

Ordonăm elementele mulțimii M : $n_1 < n_2 < \dots$

Din $G(n_1)H(n_1) = n_1$ $G(n_1), H(n_1) \geq n_1 \geq 1 \Rightarrow G(n_1) = H(n_1) = 1$ 1p

Din $G(n_2)H(n_2) = n_2$ și $G(n_2) \geq n_2$ (G fiind injectivă) $\Rightarrow H(n_2) \leq 1 \Rightarrow H(n_2) = 1 \Rightarrow G(n_2) = n_2$

Se arată prin inducție matematică faptul că $H(n) = 1 \Rightarrow G(n) = n, \forall n \in M$, contradicție cu faptul că H este surjectivă! 3p