

Olimpiada națională de matematică- clasa a VII-a
Etapă locală- 16 februarie 2014

SUBIECTUL 1.

Aflați numerele întregi x , diferite de -1 , astfel încât $\sqrt{\frac{x-2010}{x+1}}$ să fie număr întreg.

Cioancă Monica, C.N. Liviu Rebreanu, Bistrița

SUBIECTUL 2.

Fie ABC un triunghi și M mijlocul lui $[BC]$. Dacă P este un punct astfel încât $M \in (AP)$ și triunghiurile ABM și PBM au aceeași arie, stabiliți natura patrulaterului $ABPC$.

Suplimentul Gazetei Matematice, decembrie, 2013

SUBIECTUL 3.

Considerăm numerele raționale:

$$a = \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \frac{1}{1+2+3+4} + \dots + \frac{1}{1+2+3+\dots+2013} \text{ și}$$

$$b = \frac{3}{1 \cdot 4} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{12^2} + \frac{9}{20^2} + \dots + \frac{89}{1980^2}$$

Arătați că numărul $c = \sqrt{2 \cdot \frac{1-b}{1-a}}$ este irațional.

NOTĂ: Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte.

Nu se acordă puncte din oficiu.

Timp efectiv de lucru 2 ore.

Soluție și Barem de corectare

SUBIECTUL 1.

Fie $\sqrt{\frac{x-2010}{x+1}} = k$, k natural deci întreg..... 1p

Ridicăm la pătrat relația de mai sus și obținem

$$k^2 = \frac{x-2010}{x+1} \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{sau } k^2 = \frac{x+1-2011}{x+1} = 1 - \frac{2011}{x+1} \dots\dots\dots 2p$$

Deoarece k^2 este număr întreg rezultă că $\frac{2011}{x+1}$ este număr întreg..... 1p

Adică $x+1 \in \{-1; 1; -2011; 2011\}$ și $x \in \{-2; 0; -2012; 2010\}$ 1p

Înlocuind valorile lui x în $\sqrt{\frac{x-2010}{x+1}} \in \mathbb{Z}$ obținem că $x=2010$ 1p

SUBIECTUL 2.

Construim $BE \perp AP$ 1p

$$S_{ABM} = \frac{BE \cdot AM}{2} \dots\dots\dots 1p$$

$$S_{BPM} = \frac{BE \cdot PM}{2} \dots\dots\dots 1p$$

$$\frac{BE \cdot AM}{2} = \frac{BE \cdot PM}{2} \dots\dots\dots 1p$$

Din relația de mai sus rezultă că $AM=PM$ și cum $BM=MC$ rezultă că ABPC este paralelogram. 1p

Discuție

Dacă triunghiul ABC este isoscel de bază [BC], sau echilateral, atunci ABPC este romb. Dacă triunghiul ABC este dreptunghic isoscel, de bază [BC], atunci patrulaterul ABPC este pătrat. Dacă triunghiul ABC este dreptunghic în A, atunci ABPC este dreptunghi 2p

SUBIECTUL 3.

Calculând sumele de la numitorii fracțiilor obținem că $a = \frac{2}{2 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 4} + \frac{2}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{2}{2013 \cdot 2014}$ 1p

Dând apoi factor comun pe 2 și folosind egalitatea $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, n natural $n \neq 0$, avem că $a = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2014}\right) = \frac{2012}{2014}$ 1p

Observând o regulă de formare a numitorilor, numărul b îl mai putem scrie

$$b = \frac{3}{1 \cdot 4} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \frac{9}{4^2 \cdot 5^2} + \dots + \frac{89}{44^2 \cdot 45^2} \dots\dots\dots 1p$$

Prin ridicarea la pătrat a fiecărui factor de la numitorii fracțiilor putem scrie

$$b = \frac{3}{1 \cdot 4} + \frac{5}{4 \cdot 9} + \frac{7}{9 \cdot 16} + \frac{9}{16 \cdot 25} + \dots + \frac{89}{1936 \cdot 2025} \dots\dots\dots 1p$$

Și utilizând faptul că $\frac{3}{1 \cdot 4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{4}$; $\frac{5}{4 \cdot 9} = \frac{1}{4} - \frac{1}{9}$; ...; $\frac{89}{1936 \cdot 2025} = \frac{1}{1936} - \frac{1}{2025}$;

$$\text{avem } b = \frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{1936} - \frac{1}{2025} = \frac{2024}{2025} \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Înlocuind valorile numerelor a și b în } c = \sqrt{2 \cdot \frac{1-b}{1-a}} \text{ obținem că } c = \sqrt{2 \cdot \frac{1 - \frac{2024}{2025}}{\frac{2012}{2014}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2014}{2025}} = \frac{\sqrt{2014}}{45}, \text{ adică c este număr irațional } \dots\dots\dots 2p$$