



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapă locală – Constanța, 17.02.2019

Clasa a XII-a

Barem

SUBIECTUL 1

$$(\Rightarrow) n = 2p + 1$$

$$f(x) = f(y) \Rightarrow x^2 = y^2 \Rightarrow (x^2)^p = (y^2)^p \dots\dots\dots 2p$$

Dar $x^n = y^n = e \Rightarrow x^{2p+1} = y^{2p+1} \Rightarrow x = y$ deci f este o funcție injectivă 2p

($\Leftarrow$) f este funcție injectivă.

Presupunem prin reducere la absurd că $n = 2p$. Atunci $\exists a \in G$, element de ordinul 2.1p

$$f(a) = a^2 = e = f(e), \text{ dar } a \neq e, \text{ ceea ce înseamnă că } f \text{ nu este funcție injectivă.} \dots\dots\dots 1p$$

Deci presupunerea este falsă, rezultă că n este impar 1p

SUBIECTUL 2

a) Presupunem, prin reducere la absurd, că $G \neq H$ și $G \neq K$.

Fie $a \in H - K$ și $b \in K - H$. Cum $ab \in G = H \cup K \Rightarrow ab \in H$ sau $ab \in K$ 1p

Fie $ab \in H$. Cum $a \in H \Rightarrow a^{-1} \in H \Rightarrow a^{-1}ab \in H \Rightarrow b \in H$, contradicție! 1p

Analog în cazul $ab \in K$ 1p

b) Fie $b \in H$. Cum $a \notin H \Rightarrow ab \notin H$ 1p

Deci $ab \in G - H \Rightarrow ab = a$ sau $ab = a^2$ 1p

Așadar $b = e$ sau $b = a$. Dar $a \notin H \Rightarrow H = \{e\} \Rightarrow G = \{e, a, a^2\}$ 1p

Izomorfismul 1p

SUBIECTUL 3

$$(F^2)' = f^2 \Rightarrow 2Ff = f^2 \Rightarrow 2F = f \text{ (pentru că } f \neq 0) \dots\dots\dots 2p$$

$$(F(x) \cdot e^{-2x})' = F'(x) \cdot e^{-2x} - 2F(x) \cdot e^{-2x} = (f(x) - 2F(x))e^{-2x} = 0, \forall x \in \mathbf{R} \dots\dots\dots 3p$$

$$\exists c \in \mathbf{R} : F(x) \cdot e^{-2x} = c, \forall x \in \mathbf{R} \Rightarrow F(x) = ce^{2x} \Rightarrow f(x) = 2ce^{2x}, c \in \mathbf{R}^* \dots\dots\dots 2p$$

SUBIECTUL 4

Facem schimbarea de variabilă $-x = t$

$$I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{2^{-x} \lg^2(-x)}{1+2^{-x}} + \frac{3^{-x} \lg^4(-x)}{1+3^{-x}} \right) dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\lg^2 x}{1+2^x} + \frac{\lg^4 x}{1+3^x} \right) dx \dots\dots\dots 3p$$

$$2I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\lg^2 x + \lg^4 x) dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \lg^2 x (\lg x)' dx = \frac{\lg^3 x}{3} \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{2\lg^3 \frac{\pi}{4}}{3} = \frac{2}{3} \dots\dots\dots 3p$$

$$I = \frac{1}{3} \dots\dots\dots 1p$$

Notă. Orice altă rezolvare corectă primește punctajul maxim.