

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ 24.02.2017 –**

CLASA A IX-A

**Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 3 ore.**

1. Să se arate că pentru orice $x \in \mathbb{R}$ și orice $a, n \in \mathbb{N}$ au loc:

a) $|x + a| + |x - a^2| \geq a^2 + a;$

b) $|x + 1| + |x + 2| + \dots + |x + n| + |x - 1^2| + |x - 2^2| + \dots + |x - n^2| \geq$
 $\geq \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$

2. Fie $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$. Dacă $a_1 = 1, a_n = 2^{n-1}$, să se determine $a_k \in (0, \infty)$,
 $k \in \{2, 3, \dots, n-1\}$, știind că

$$\frac{a_2^2}{a_1} + \frac{a_3^2}{a_2} + \frac{a_4^2}{a_3} + \dots + \frac{a_n^2}{a_{n-1}} \leq 2^{n+1} - 4$$

3. a) Arătați că în orice triunghi ABC are loc relația $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, unde
 O este centrul cercului circumscris triunghiului, iar H este ortocentrul triunghiului.

b) Fie $ABCD$ un patrulater înscris în cercul de centru O și care are diagonalele AC și
 BD perpendiculare. Dacă H_1 și H_2 sunt ortocentrele triunghiurilor ACD și ABC ,
arătați că $\overline{BH_2} = \overline{DH_1}$.

4. Fie $a_1, a_2, \dots, a_n$ numere pozitive cu suma 1. Să se arate că:

a) $\frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2} + \frac{a_2 a_3}{a_2 + a_3} + \dots + \frac{a_n a_1}{a_n + a_1} \leq \frac{1}{2};$

b) $\sqrt{a_1(a_2 + a_3 + \dots + a_n)} + \sqrt{a_2(a_1 + a_3 + \dots + a_n)} + \dots +$
 $+ \sqrt{a_n(a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1})} \leq \frac{n}{2}.$