

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN SIBIU

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ  
FAZA LOCALĂ, 25.02.2017  
Clasa a X-a

1. (7p) Demonstrați că, oricare ar fi  $a, b \in (1, \infty)$ , are loc inegalitatea

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \log_a \sqrt{b}}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \log_b a^2}} \leq \sqrt{\log_a \sqrt{b} + \log_b a^2}.$$

GM 4/2016

2. (7p) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația

$$xe^{x^2-e} + x^2e^x - e^{x+1} = x^2 + x - e.$$

Doriana Dorca

3. (7p) Determinați numerele complexe  $z$  de modul 1, care verifică egalitatea  $|1 + z + z^3| = \sqrt{3}$ .

\*\*\*

4. Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ ,  $f(x) = \log_2(2^x + 1)$ .

(2p) a) Arătați că funcția  $f$  este bijectivă și determinați funcția inversă.

(2p) b) Demonstrați că  $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}$ , pentru orice numere reale  $x$  și  $y$ .

(3p) c) Calculați  $f_{2017}$ , unde  $f_{2017} = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{2017 \text{ termeni}}, n \in \mathbb{N}^*$ .

\*\*\*

**Notă:** Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp efectiv de lucru: 3 ore.