OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
etapa locală
Clasa a XII- a
16 februarie 2013

SUBIECTUL I (7p)

Fie $G=(-1,1)$. Pentru orice $x,y\in G$ notăm $x*y=\frac{x+y}{1+xy}$.

4p) a) Arătați că $(G,*)$ este un grup abelian izomorf cu $(\mathbb{R}_+^*,\cdot)$ prin $f:G\to\mathbb{R}_+^*$, $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$.

3p) b) Pentru $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, calculați $A=\frac{1}{7}*\frac{1}{17}*\frac{1}{31}*\ldots*\frac{1}{2n^2-1}$.

SUBIECTUL II (7p)

Fie $(G,\cdot)$ un grup. Să se demonstreze că:

1p) a) Dacă $x^2y=yx^2$ și $x^3y=yx^3$ $(\forall)x,y\in G$, atunci G este comutativ;

2p) b) Dacă $x^7y=yx^7$ și $x^3y=yx^3$ $(\forall)x,y\in G$, atunci G este comutativ;

4p) c) Dacă există $m,n\in\mathbb{N}^*$ prime între ele astfel încât $x^ny=yx^n$ și $x^my=yx^m$, $(\forall)x,y\in G$, atunci G este comutativ.

SUBIECTUL III (7p)

Fie $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}^*$, $f_n(x)=\begin{cases} nx^{n-1}\cos\frac{1}{x}+x^{n-2}\sin\frac{1}{x}, & x\in\mathbb{R}^* \\ 0, & x=0 \end{cases}$.

3p) a) Demonstrați că f_1 nu admite primitive pe $\mathbb{R}$;

4p) b) Arătați că pentru $n\geq 2$, f_n admite primitive pe $\mathbb{R}$.

SUBIECTUL IV (7p)

Fie $I_n=\int_0^1 x^n\ln(x+1)dx$, $n\in\mathbb{N}^*$.

3p) a) Să se calculeze I_2;

4p) b) Aflați $\lim_{n\to\infty} nI_n$.

Subiecte selectate de prof. Ciudin Ion

NOTĂ: ***Fiecare subiect este notat cu un punctaj de la 0 la 7 puncte.***
Timp de lucru – 3 ore.