

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 16.02.2019

BAREM DE CORECTARE - Clasa a XI – a

PROBLEMA 1. Se consideră matricele $A \in M_3(\mathbb{R})$ și $C = A - A^t$.

- a) Să se demonstreze că $\det(C) = 0$;
- b) Să se arate că dacă $\operatorname{tr}(A^2) = \operatorname{tr}(A \cdot A^t)$, atunci $C = O_3$.

Barem de corectare.

- a) Din $\det(C) = \det(C^t) = \det(-C) = -\det(C)$, rezultă că $\det(C) = 0$ (**4p**);
- b) Deoarece $\operatorname{tr}(C \cdot C^t) = \operatorname{tr}(A \cdot A^t) + \operatorname{tr}(A^t \cdot A) - \operatorname{tr}(A^2) - \operatorname{tr}((A^t)^2) = 2 \cdot (\operatorname{tr}(A \cdot A^t) - \operatorname{tr}(A^2)) = 0$ (**2p**), iar $\operatorname{tr}(C \cdot C^t)$ este suma pătratelor elementelor lui $C \in M_3(\mathbb{R})$, din $\operatorname{tr}(C \cdot C^t) = 0$, obținem că $C = O_3$ (**1p**).

PROBLEMA 2. Fie matricele $A, B \in M_3(\mathbb{R})$ și $\varepsilon = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \in \mathbb{C}$. Să se demonstreze că dacă $\det(A + \varepsilon B) \in \mathbb{R}$, atunci $\det(A - B) = \det(A) - \det(B)$.

Barem de corectare.

Avem $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$ și $\varepsilon^3 = 1$ (**1p**).

Deoarece $\det(A + xB) = \det(A) + a \cdot x + b \cdot x^2 + \det(B) \cdot x^3$, unde $a, b \in \mathbb{R}$ (**2p**), din $\det(A + \varepsilon B) = \det(A) + a \cdot \varepsilon + b \cdot \varepsilon^2 + \det(B) \cdot \varepsilon^3 = \underbrace{(\det(A) + \det(B) - b)}_{\in \mathbb{R}} + (a - b) \cdot \varepsilon \in \mathbb{R}$, rezultă că $a = b$ (**2p**).

Așadar, $\det(A - B) = \det(A) - a + b - \det(B) = \det(A) - \det(B)$ (**2p**).

PROBLEMA 3. Fie şirurile $(a_n)_{n \geq 1}$ şi $(b_n)_{n \geq 1}$ definite prin $a_1 = 1$ şi $a_{n+1} = \frac{1+a_n}{\sqrt{n+1}}$, $n \geq 1$, respectiv $b_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$.

- a) Să se demonstreze că $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$;
- b) Să se demonstreze că $b_n > \sqrt{n}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$;
- c) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{b_n}$.

Barem de corectare.

- a) Deoarece $0 \leq a_n \leq 2$, pentru $n \geq 1$ (**1p**), obţinem că $\frac{1}{\sqrt{n+1}} < a_{n+1} < \frac{3}{\sqrt{n+1}}$, de unde rezultă că $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ (**2p**);
- b) Inducţie matematică (**1p**);
- c) Deoarece şirul $(b_n)_{n \geq 1}$ este strict crescător şi nemărginit (**1p**), pe baza lemei lui Cesaro–Stolz, avem $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{\frac{1}{\sqrt{n+1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a_n) = 1$ (**2p**).

PROBLEMA 4. Să se determine valorile lui $a \in \mathbb{N}$, pentru care şirul $(x_n)_{n \geq 1}$, definit prin $x_n = \cos(\pi\sqrt{n^2 + an + 1})$, este convergent.

Barem de corectare.

Deoarece $x_n = (-1)^n \cdot \cos(\pi\sqrt{n^2 + an + 1} - n\pi) = (-1)^n \cdot \cos \frac{(an+1)\pi}{\sqrt{n^2 + an + 1} + n} = (-1)^n \cdot \cos \frac{(a + \frac{1}{n})\pi}{\sqrt{1 + a\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} + 1}$ (**3p**) şi $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{(a + \frac{1}{n})\pi}{\sqrt{1 + a\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} + 1} = \cos \frac{a\pi}{2}$, rezultă că şirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este convergent la 0, dacă a este impar (**2p**) şi este divergent, dacă a este par (**2p**).

¹Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

²Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.