OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA
22 februarie 2014

CLASA a IX-a

1. Să se determine funcțiile $f:\mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ care satisfac relația $\frac{f^2(n)}{n+f(n)}+\frac{n}{f(n)}=\frac{1+f(n+1)}{2}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Se dă şirul $(a_n)_{n\geq 1}$, definit prin $a_n=\frac{x^{n+1}+y^{n+1}}{x^n+y^n}+\frac{y^{n+1}+z^{n+1}}{y^n+z^n}+\frac{z^{n+1}+x^{n+1}}{z^n+x^n}$, unde x, y, z sunt numere reale strict pozitive. Demonstraţi că: $a_{n+1}+a_{n-1} \leq 2a_n, \forall n \geq 2$.

3. Fie ABCD un patrulater și punctele M,N,P,Q astfel încât $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{BN}=3\overrightarrow{NC}$, $\overrightarrow{DP}=\overrightarrow{PC}, \overrightarrow{DQ}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$. Să se arate că dreapta MP trece prin mijlocul segmentului $[NQ]$.

4. În dreptunghiul ABCD punctul E este mijlocul laturii BC, iar punctele diferite F și G aparțin segmentului [AB], astfel că AF=FG. Dreptele EF și CG intersectează dreptele AC, respectiv AD în punctele M și respectiv N. Să se demonstreze că dreptele MN și BD sunt paralele.

Notă: 1. Toate subiectele sunt obligatorii.
2. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7.
3. Timp de lucru 3 ore.