OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ

SUCEAVA

2 februarie 2020

CLASA a XII-a

1. **(7p)** Fie grupul $(G,\cdot)$ cu proprietatea că există $y \in G$ asfel încât $x^5 = (xy)^3$, $\forall x \in G$.
Să se arate că $(G,\cdot)$ este grup comutativ.

2. Fie $f:[0,2] \to \mathbb{R}$ o funcție integrabilă astfel încât $\int_0^1 f(x)dx = \int_1^2 f(x)dx$. În plus, funcția f admite o primitivă F cu proprietatea că numerele $F(0)$, $F(1)$ și $F(2)$ sunt în progresie geometrică.

a) **(4p)** Demonstrați că funcția F nu este injectivă.

b) **(3p)** Demonstrați că ecuația $f(x) = 0$ are cel puțin două soluții în intervalul $(0,2)$.

3. **a)** **(2p)** Demonstrați că există un interval deschis $I \subset \mathbb{R}$ astfel încât $x^{2020} + 1 < 3x^{1010}$, $\forall x \in I$.

b) **(5p)** Calculați $\int \frac{x^{2020} - 1}{x\sqrt{-x^{4040} + 2x^{3030} + x^{2020} + 2x^{1010} - 1}}dx$, $x \in I$.

4. Fie p și q două numere prime diferite și $(G,\cdot)$ un grup necomutativ cu pq elemente.

a) **(3p)** Arătați că $Z(G) = \{e\}$.

b) **(4p)** Să se demonstreze că G conține două elemente de același ordin care nu comută.

Am notat cu e elementul neutru din G și cu $Z(G)$ centrul grupului G, adică mulțimea $Z(G) = \{y \in G /\ xy = yx, \forall x \in G\}$.

Notă: 1. Toate subiectele sunt obligatorii.
2. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7.
3. Timp de lucru 3 ore.