

Olimpiada de matematică – faza locală
Barem de corectare , clasa a XII-a

1.

a) Fie $u: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, u(x) = e^{2x} + 3x^3 + 6x^2 - 12x + 9$ 1p

$$\int \frac{e^{2x} + x^3 + 5x^2 - 1}{e^{2x} + 3x^3 + 6x^2 - 12x + 9} dx = \frac{1}{3} \int \frac{u(x) + u'(x)}{u(x)} dx \dots\dots\dots 2p$$

Finalizare..... 1p

b) $\int \frac{1}{x^4 + x^{10}} dx = \int \frac{1}{x^{10}(\frac{1}{x^6} + 1)} dx, u: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, u(x) = \frac{1}{x^3}$ 1p

$$\int \frac{1}{x^4 + x^{10}} dx = -\frac{1}{3} \int \frac{u^2(x)u'(x)}{u^2(x)+1} dx = -\frac{1}{3}(u(x) - \int \frac{u'(x)}{u^2(x)+1} dx) \dots\dots\dots 1p$$

Finalizare.....1p

2.

a) Elementul neutru este $e = 2$2p

Simetricul lui $a \in \mathbb{R}$ este $a' = f(2q - f^{-1}(a))$ 2p

b) $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} = 6$2p

Finalizare.....1p

3.

a) $I_1 = 2$1p

b) Șirul este monoton și mărginit, deci convergent.....2p

$$1 \leq \sqrt{1 + \sin^n x} \leq 1 + \frac{1}{2} \sin^n x, \forall n \geq 1, \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}] \dots\dots\dots 2p$$

Rezultă $\frac{\pi}{2} \leq I_n \leq \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} J_n$, unde $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$ este șir care are limita egală cu zero.

$$\text{Deci } \lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \frac{\pi}{2} \dots\dots\dots 2p$$

4.

Fie $f: \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Z}_p^*$ un morfism de grupuri.

Avem $f(\hat{0}) = \hat{1}$ și notăm $f(\hat{1}) = \hat{a}$ 1p

$$\hat{1} = f(\hat{0}) = f(\hat{p}) = f\left(\underbrace{\hat{1} + \dots + \hat{1}}_{p \text{ ori}}\right) = f(\hat{1})f(\hat{1}) \dots f(\hat{1}) = \hat{a}^p \dots\dots\dots 2p$$

Conform teoremei lui Fermat rezultă că $\hat{a}^p = \hat{a} = \hat{1}$ deci $f(\hat{1}) = \hat{1}$2p

Fie $\hat{x} \in \mathbb{Z}_p$. Atunci $f(\hat{x}) = f\left(\underbrace{\hat{1} + \dots + \hat{1}}_{x \text{ ori}}\right) = (f(\hat{1}))^x = \hat{1}$, deci unicul morfism este

morfismul constant $f(\hat{x}) = \hat{1}, \forall x \in \mathbb{Z}_p$2p