OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ – VRANCEA

08.02.2020

CLASA A VIII-A

SOLUȚII ȘI BAREM DE CORECTARE

SUBIECTUL 1

a) $(a-\sqrt{2})^2+(b-\sqrt{3})^2=0$ ... 1p

$a=\sqrt{2}, b=\sqrt{3}$ ... 1p

$\left(\frac{2}{a}+\frac{3}{b}\right)(b-a)=\left(\frac{2}{\sqrt{2}}+\frac{3}{\sqrt{3}}\right)(\sqrt{3}-\sqrt{2})=(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{3}-\sqrt{2})=1$ ... 1p

b) $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^2=\frac{a^2}{b^2}+2+\frac{b^2}{a^2}\Rightarrow\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}=\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^2-2$ ... 1p

Inegalitatea dată devine

$$4\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^2-20\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+25\leq 0,$$

adică

$$\left[2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)-5\right]^2\leq 0$$ ... 1p

de unde

$$2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)-5=0$$ ... 1p

sau $2a^2+2b^2-5ab=0\Leftrightarrow(a-2b)(2a-b)=0\Longrightarrow\ a=2b$ sau $b=2a$. ... 1p

SUBIECTUL 2

$B'C\parallel A'D\Longrightarrow m\left(\widehat{AD',B'C}\right)=m\left(\widehat{AD',A'D}\right)$ ... 1p

Fie $A'D\cap AD'=\{O\}$ și $AA'=x$.

Dacă $m\left(\widehat{A'OA}\right)<m\left(\widehat{AOD}\right)$, atunci $m\left(\widehat{A'OA}\right)=60^\circ$ și cum $OA'=OA$, rezultă $AA'=A'O=\frac{A'D}{2}$ de unde $A'D=2x$. ... 1p

$AA'^2+AD^2=A'D^2\Leftrightarrow x^2+12=4x^2\Leftrightarrow x=2$ ... 1p

$BD'=\sqrt{AB^2+BC^2+A'A^2}=\sqrt{34}$ cm ... 1p

Dacă $m\left(\widehat{A'OA}\right)>m\left(\widehat{AOD}\right)$, atunci $m\left(\widehat{AOD}\right)=60^\circ$ și cum $OA=OD$, rezultă $OD=AD=2\sqrt{3}$ cm de unde $A'D=4\sqrt{3}$ cm. ... 1p

$AA'^2+AD^2=A'D^2\Leftrightarrow x^2+12=48\Leftrightarrow x=6$ ... 1p

$BD'=\sqrt{AB^2+BC^2+A'A^2}=\sqrt{66}$ cm ... 1p

SUBIECTUL 3

Soluția 1.

$ab + bc + ac \geq \frac{1}{3} = \frac{1^2}{3} = \frac{(a+b+c)^2}{3}$ ... **2p**

$3ab + 3bc + 3ac \geq a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$ ... **1p**

$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac \leq 0 | \cdot 2$ ... **1p**

$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ac \leq 0$ ... **1p**

$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \leq 0$ ... **1p**

$a = b = c$ și cum $a + b + c = 1 \Longrightarrow\ a = b = c = \frac{1}{3}$ ... **1p**

Soluția 2.

$a + b + c = 1 \Longrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca = 1$ ... **1p**

$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$ și $ab + bc + ac \geq \frac{1}{3} \Longrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}$ ... **1p**

$ab + bc + ac = \frac{1 - (a^2 + b^2 + c^2)}{2} \geq \frac{1}{3} \Longrightarrow \frac{1}{3} \geq a^2 + b^2 + c^2$ ... **1p**

Dar $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}$, deci $a^2 + b^2 + c^2 = \frac{1}{3}$ ... **1p**

de unde $\frac{1}{3} + 2ab + 2bc + 2ca = 1 \Leftrightarrow ab + bc + ca = \frac{1}{3}$, ... **1p**

dar $a^2 + b^2 + c^2 = \frac{1}{3}$, de unde rezultă $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca \Leftrightarrow$ ... **1p**

$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = c$ și cum $a + b + c = 1 \Longrightarrow$
$a = b = c = \frac{1}{3}$ ... **1p**

SUBIECTUL 4

Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$.

a) Alegem 1 în A, 2 în B, 4 în C, 5 în D, 8 în A', 7 în B', 11 în C', 10 în D'. ... **3 p**

b) Presupunem că avem o alegere. Alegem un număr în A. Atunci numerele din vârfurile B, D și A' au aceeași paritate cu numărul din A. ... **1 p**

Pentru numărul din vârful B trebuie ca cele din vârfurile A, C și B' să aibă aceeași paritate cu el, deci cu numărul din A. ... **1 p**

La fel pentru numerele din vârfurile C și D. ... **1 p**

Astfel, toate cele 8 numere alese trebuie să aibă aceeași paritate. Dar, în mulțimea $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ sunt cel mult 7 numere cu aceeași paritate, deci, presupunerea făcută este falsă. ... **1 p**

OBSERVAȚIE: *Pentru orice altă soluție se acordă punctajul corespunzător.*
Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.