

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ –
10.02.2024

CLASA a IX -a

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.

Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.

1. a) Calculați suma $S = [\sqrt{1 \cdot 2}] + [\sqrt{2 \cdot 3}] + [\sqrt{3 \cdot 4}] + \dots + [\sqrt{n \cdot (n+1)}], n \in \mathbb{N}^*$.

b) Rezolvați în $\mathbb{R}^*$ ecuația $[x] + \left\{ \frac{1}{x} \right\} = \{x\} + \left[\frac{1}{x} \right]$, unde $[x]$ și $\{x\}$ sunt partea întreagă, respectiv partea fracționară a numărului real x .

Soluție:

a) $k^2 < k(k+1) < (k+1)^2 \Rightarrow k < \sqrt{k(k+1)} < k+1 \Rightarrow \left[\sqrt{k(k+1)} \right] = k, \quad k = \overline{1, n}.$

$$S = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

b) Ecuația din enunț $[x] + \left\{ \frac{1}{x} \right\} = \{x\} + \left[\frac{1}{x} \right]$ este echivalentă cu $[x] - \left[\frac{1}{x} \right] = \{x\} - \left\{ \frac{1}{x} \right\}$

$$[x] - \left[\frac{1}{x} \right] \in \mathbb{Z}, \{x\} - \left\{ \frac{1}{x} \right\} \in (-1, 1) \Rightarrow [x] - \left[\frac{1}{x} \right] = 0, \{x\} - \left\{ \frac{1}{x} \right\} = 0 \Rightarrow [x] = \left[\frac{1}{x} \right], \{x\} = \left\{ \frac{1}{x} \right\}$$

Deci $x = [x] + \{x\} = \left[\frac{1}{x} \right] + \left\{ \frac{1}{x} \right\} = \frac{1}{x}$, de unde $x = \frac{1}{x} \Rightarrow x = 1, \quad x = -1$, care verifică ecuația.

Detalii de rezolvare	Barem asociat
a) $k^2 < k(k+1) < (k+1)^2 \Rightarrow k < \sqrt{k(k+1)} < k+1 \Rightarrow \left[\sqrt{k(k+1)} \right] = k, \quad k = \overline{1, n}$	2p
$S = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$	1p
b) $[x] - \left[\frac{1}{x} \right] = \{x\} - \left\{ \frac{1}{x} \right\}, [x] - \left[\frac{1}{x} \right] \in \mathbb{Z}, \{x\} - \left\{ \frac{1}{x} \right\} \in (-1, 1)$	1p
$[x] - \left[\frac{1}{x} \right] = 0, \{x\} - \left\{ \frac{1}{x} \right\} = 0 \Rightarrow [x] = \left[\frac{1}{x} \right], \{x\} = \left\{ \frac{1}{x} \right\} \Rightarrow x = \frac{1}{x}$	2p
$x = \frac{1}{x} \Rightarrow x = 1, x = -1$, care verifică ecuația	1p

2. Coardele $[AB]$ și $[CD]$ ale cercului $\mathcal{C}(O, r)$ sunt perpendiculare și se intersectează în punctul P. Să se demonstreze relația: $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = 2\overrightarrow{PO}$.

Soluție:

Fie M mijlocul coardei $[AB]$ și N mijlocul coardei $[CD]$.

Rezultă că $OM \perp AB$, $ON \perp CD$, iar OMPN dreptunghi.

Din regula paralelogramului, $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}$.

Din regula triunghiului,

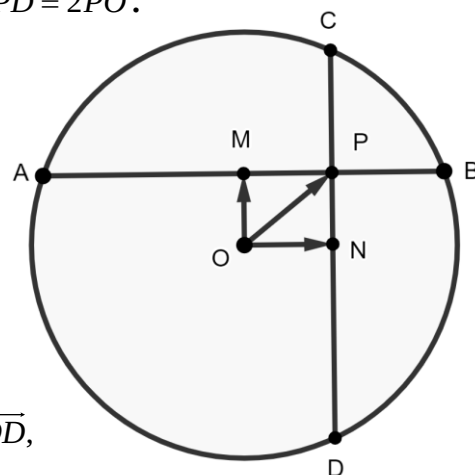
$$\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OA}, \quad \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OB}, \quad \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OC}, \quad \overrightarrow{PD} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OD},$$

de unde, prin însumare obținem $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = 4\overrightarrow{PO} + (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$.

Cum $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{ON}$, avem

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = 4\overrightarrow{PO} + 2\overrightarrow{OM} + 2\overrightarrow{ON} = 4\overrightarrow{PO} + 2(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON})$$

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = 4\overrightarrow{PO} + 2\overrightarrow{OP} = 2\overrightarrow{PO}.$$



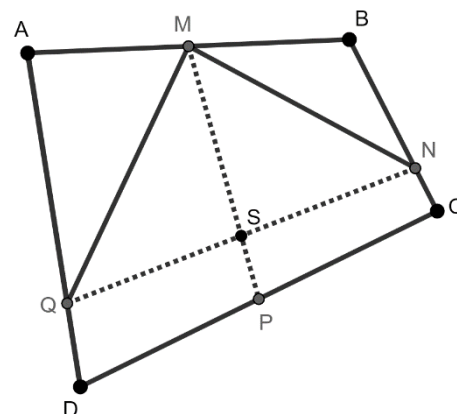
Detalii de rezolvare	Barem asociat
$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}$	1p
$\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{PD} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OD},$ $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = 4\overrightarrow{PO} + (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$	3p
$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{ON}$	1p
$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = 4\overrightarrow{PO} + 2\overrightarrow{OP} = 2\overrightarrow{PO}.$	2p

3. Fie ABCD un patrulater și punctele M, N, P, Q astfel încât

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{BN} = 3\overrightarrow{NC}, \overrightarrow{DP} = \overrightarrow{PC}, \overrightarrow{DQ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DA}.$$

a) Demonstrați că $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MQ} = \frac{3}{4}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$.

b) Arătați că dreapta MP trece prin mijlocul segmentului NQ.



Soluție:

a) Din $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$ rezultă că M este mijlocul [AB]. Analog, P este mijlocul [DC].

$$\overrightarrow{BN} = 3\overrightarrow{NC} \Rightarrow \overrightarrow{BN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}, \quad \overrightarrow{DQ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DA} \Rightarrow \overrightarrow{AQ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}.$$

$$\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{AQ} = \frac{3}{4}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}).$$

b) Fie S mijlocul [NQ] $\Rightarrow \overrightarrow{MS} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MQ}) = \frac{3}{8}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD})$ (1)

$$2\overrightarrow{MP} = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DP}) + (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CP}) \Rightarrow \overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$$
 (2)

Din (1) și (2) $\Rightarrow \overrightarrow{MP} = \frac{4}{3}\overrightarrow{MS}$, rezultă că punctele M, S, P sunt coliniare, deci dreapta MP

trece prin mijlocul [NQ].

Detalii de rezolvare	Barem asociat
a) M este mijlocul [AB], P este mijlocul [DC].	1p
$\overrightarrow{BN} = 3\overrightarrow{NC} \Rightarrow \overrightarrow{BN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$ și $\overrightarrow{DQ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DA} \Rightarrow \overrightarrow{AQ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$	1p
$\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{AQ} = \frac{3}{4}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD})$	2p
b) S mijlocul [NQ] $\Rightarrow \overrightarrow{MS} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MQ}) = \frac{3}{8}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD})$	1p
$2\overrightarrow{MP} = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DP}) + (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CP}) \Rightarrow \overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$	1p
$\overrightarrow{MP} = \frac{4}{3}\overrightarrow{MS} \Rightarrow M, S, P$ sunt coliniare $\Rightarrow$ dreapta MP trece prin mijlocul [NQ].	1p

4. a) Fie $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Arătați că $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1} > \frac{n-1}{n+2}$

b) Fie $x \in (0,1)$. Arătați că $x - x^3 < \frac{1}{2}$

Soluție: a)

$$P(n): \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1} > \frac{n-1}{n+2}, \forall n \geq 2$$

$$P(2): \frac{1}{3} > \frac{1}{4} \text{ ade v ă r at}$$

$$\text{presupunem } P(k): \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2k-1} > \frac{k-1}{k+2}, \text{ ade v ă r at ă, } \forall k \geq 2$$

$$P(k+1): \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2k-1} + \frac{1}{2k+1} > \frac{k}{k+3}$$

$$\text{dar, ms } > \frac{k-1}{k+2} + \frac{1}{2k+1} > \frac{k}{k+3} \text{ (de demonstrat)}$$

$$\text{adic ă } \frac{2k^2+1}{(k+2)(2k+1)} > \frac{k}{k+3} \Leftrightarrow \cancel{2k^3} + 6k^2 + k + 3 > \cancel{2k^3} + 5k^2 + 2k \Leftrightarrow k^2 - k + 3 > 0$$

$$\text{dar } k \geq 2 \Rightarrow k^2 > k \Leftrightarrow k^2 - k + 3 > 0 \text{ ade v ă r at ă, } \forall k \geq 2$$

$$\text{Deci } P(k) \rightarrow P(k+1), \forall k \geq 2$$

$$\text{Atunci } P(n) \text{ ade v ă r at ă, } \forall n \geq 2$$

$$b) \quad x \in (0,1), m_g \leq m_a \Leftrightarrow \sqrt{x(1-x^2)} \leq \frac{x+1-x^2}{2} \Leftrightarrow x-x^3 \leq \frac{(x+1-x^2)^2}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+1-x^2)^2}{4} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow (x+1-x^2)^2 < 2$$

$$\text{dar } x \in (0,1) \Rightarrow 0 < -x^2 + x + 1 = -(x^2 - x) + 1 = -\left(x^2 - 2x \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4} + 1 =$$

$$= \frac{5}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{5}{4} \Rightarrow (x+1-x^2)^2 \leq \frac{25}{16} < 2$$

Detalii de rezolvare	Barem asociat
a) $P(n): \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1} > \frac{n-1}{n+2}, \forall n \geq 2$ $P(2): \frac{1}{3} > \frac{1}{4}$ ade v ă r at	1p
presupunem $P(k): \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2k-1} > \frac{k-1}{k+2}, \text{ ade v ă r at ă, } \forall k \geq 2$ $P(k+1): \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2k-1} + \frac{1}{2k+1} > \frac{k}{k+3}$	1p
$\frac{k-1}{k+2} + \frac{1}{2k+1} > \frac{k}{k+3}$ (de demonstrat) $\frac{2k^2+1}{(k+2)(2k+1)} > \frac{k}{k+3} \Leftrightarrow \cancel{2k^3} + 6k^2 + k + 3 > \cancel{2k^3} + 5k^2 + 2k \Leftrightarrow k^2 - k + 3 > 0$ $k \geq 2 \Rightarrow k^2 > k \Leftrightarrow k^2 - k + 3 > 0 \text{ ade v ă r at ă, } \forall k \geq 2$	2p
b) $m_g \leq m_a \Leftrightarrow \sqrt{x(1-x^2)} \leq \frac{x+1-x^2}{2} \Leftrightarrow x-x^3 \leq \frac{(x+1-x^2)^2}{4} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \frac{(x+1-x^2)^2}{4} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow (x+1-x^2)^2 < 2$	2p
$0 < -x^2 + x + 1 = -(x^2 - x) + 1 = -\left(x^2 - 2x \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{5}{4}$ $\Rightarrow (x+1-x^2)^2 \leq \frac{25}{16} < 2$	1p