OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 09.02.2013

Clasa a XII-a

Barem de corectare

Problema 1

a) Considerăm $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = x - \ln(x+1)$, $f'(x) = 1-\frac{1}{x+1}$ deci x=0 punct de minim global $\Rightarrow f(x) \geq f(0) = 0\ \forall x \in (-1,+\infty)$ **(3p)**

b) Din a) rezultă $\ln(tg\, x) \leq tg(x) - 1$ **(1p)**

$$\Rightarrow \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \ln(tg\, x)\,dx \leq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} (tg(x)-1)dx = -\ln|\cos x|\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} - \frac{\pi}{12} = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{\pi}{12}$$ **(3p)**

Problema 2

$(G,\cdot) \simeq (\mathbb{Z}_4,+) \Rightarrow |G|=4$ **(1p)**

Dacă $G=\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ şi x □ G atunci $G_x=\{xx_1, xx_2, xx_3, xx_4\}= \{x_1, x_2, x_3, x_4\}=G \Rightarrow$

$\Rightarrow x^4(x_1 x_2 x_3 x_4)= x_1 x_2 x_3 x_4$ **(2p)**

$(G,\cdot)$ grup $\Rightarrow 0 \notin G \Rightarrow x^4=1$, $\forall$ x□ G $\Rightarrow G=\{1,-1,i,-i\}$ **(1p)**

Stabilirea izomorfismului **(2p)**

$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=(x-1)(x+1)(x-i)(x+i)=x^4-1 \Rightarrow a=b=c=0,\ d= -1$ **(1p)**

Problema 3

$\int \ln(tgx)dx = x\ln(tgx) - \int \frac{x}{\sin x \cos x}dx$ **(2p)**

Considerăm : $\left[0,\frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sin x \cos x} & , x \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right) \\ 1 & , x = 0 \end{cases}$

Funcția g este continuă, deci există G primitiva lui g și $\lim_{x\to 0} G(x) = G(0) \in \mathbb{R}$ **(2p)**

$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\ln(tgx) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\frac{1}{\cos^2 x\, tgx}}{-\frac{1}{x^2}} = 0$ **(2p)**

Rezultă că $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} F(x) = 0 - G(0) + c \in \mathbb{R}$. **(1p)**

Problema 4

Fie $x, y \in G$. Cum f surjectivă rezultă că există $a, b \in G$ a. î. $x=a^2$, $y=b^2$.

Deci $xy= a^2 b^2=f(a)f(b)=f(ab)=(ab)^2=[(ab)^{-1}]^{-2}=g((ab)^{-1})=g(b^{-1} a^{-1})=g(b^{-1})g(a^{-1})= b^2 a^2=yx$

$\Rightarrow$ $(G,\cdot)$ este grup abelian **(2p)**

$e^{r^p} = e \Rightarrow e \in G_r$ **(1p)**

$x, y \in G_r$ $\Rightarrow \exists\, m, n \in \mathbb{N}$ a. î. $x^{r^n}=e$ și $x^{r^m}=e$

Cum $(G,\cdot)$ abelian, rezultă $(xy)^{r^{m+n}} = \left(x^{r^n}\right)^{r^m}\left(y^{r^m}\right)^{r^n}=e\cdot e=e$. Deci $xy \in G_r$ **(2p)**

$x \in G_r$ rezultă $\exists\, n \in \mathbb{N}$ astfel încât $x^{r^n}=e \Rightarrow (x^{-1})^{r^n} = \left(x^{r^n}\right)^{-1} = e^{-1} = e$

$\Rightarrow x^{-1} \in G_r$. deci G_r subgrup **(2p)**

Notă: a) Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte.
b) Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.