

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală, 8 februarie 2020

Clasa a IX-a

1. Fie $a, b, c \geq 0$ și $a + b + c = 1$. Arătați că: $\frac{a^2}{a^3 + 5} + \frac{b^2}{b^3 + 5} + \frac{c^2}{c^3 + 5} \leq \frac{1}{4}$.
2. a) Dacă $(x_n)_{n \geq 1}$ este o progresie geometrică, se notează $S_n = x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Calculați S_9 , știind că $S_3 = 40$ și $S_6 = 60$.
b) Calculați suma elementelor mulțimii $B = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \left[\frac{2x+3}{4} \right] = 1 + \{2x\} \right\}$, unde $[a]$ și $\{a\}$ reprezintă partea întreagă, respectiv partea fracționară a numărului real a .
3. Se consideră un triunghi echilateral ABC cu $AB = 3$ și punctele P, Q, G, R, S astfel încât:
 $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{QC}$, $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$, $\overrightarrow{AR} = \overrightarrow{RG}$ și $\overrightarrow{AS} = r \cdot \overrightarrow{SC}$.
a) Calculați lungimea vectorului $\vec{v} = \overrightarrow{GP} + \overrightarrow{GQ}$.
b) Arătați că există un număr rațional r pentru care punctele B, R, S sunt coliniare.
4. Se dă patrulaterul convex $ABCD$ și O intersecția diagonalelor sale, $a > 0$ și $M \in (AB), N \in (BC), P \in (CD), Q \in (DA)$, astfel încât: $\frac{AM}{MB} = \frac{BN}{NC} = \frac{CP}{PD} = \frac{DQ}{QA} = a$.
a) Dacă $a = 1$, atunci $\overline{OM} + \overline{OP} = \overline{ON} + \overline{OQ}$.
b) Dacă $a \neq 1$ și $\overline{OM} + \overline{OP} = \overline{ON} + \overline{OQ}$, atunci $ABCD$ este paralelogram.

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.