# OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
## ETAPA LOCALĂ
## SUCEAVA, 2 februarie 2020
## BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
## CLASA a XII-a

**1. (7p)** Fie grupul $(G,\cdot)$ cu proprietatea că există $y \in G$ asfel încât $x^5 = (xy)^3$, $\forall x \in G$.
Să se arate că $(G,\cdot)$ este grup comutativ.

*Dan Popescu*

***Soluție:*** Fie $e$ elementul neutru din grupul $(G,\cdot)$. Vom nota cu $x^{-1}$ simetricul elementului *x*.

Punând $x = y$ în relația din enunț obținem $y^5 = y^6$ de unde , simplificând prin $y^5$, rezultă $y = e$.

Relația din enunț devine $x^5 = x^3$, $\forall x \in G$. Simplificând prin $x^3$, rezultă $x^2 = e$, $\forall x \in G$, adică $x = x^{-1}$, $\forall x \in G$.

Pentru orice $a,b \in G$ avem $ab = (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} = ba$ , adică grupul este comutativ.

***Barem.***

| | |
|---|---|
| Demonstrează că $y = e$ | 2 p |
| Demonstrează că $x = x^{-1}$, $\forall x \in G$ | 2 p |
| Finalizare | 3 p |

**2.** Fie $f:[0,2] \to \mathbb{R}$ o funcție integrabilă astfel încât $\int_0^1 f(x)dx = \int_1^2 f(x)dx$. În plus, funcția $f$ admite o primitivă $F$ cu proprietatea că numerele $F(0)$, $F(1)$ și $F(2)$ sunt în progresie geometrică.

**a) (4p)** Demonstrați că funcția $F$ nu este injectivă.

**b) (3p)** Demonstrați că ecuația $f(x) = 0$ are cel puțin două soluții în intervalul $(0,2)$.

*Dumitru Crăciun*

***Soluție:***

**a)** Cum funcția $f$ este integrabilă și admite primitive, putem calcula cele două integrale cu formula Leibniz-Newton: $\int_0^1 f(x)dx = F(x)\Big|_0^1 = F(1) - F(0)$ și $\int_1^2 f(x)dx = F(x)\Big|_1^2 = F(2) - F(1)$.

Așadar avem $F(1) - F(0) = F(2) - F(1) \Rightarrow F(1) = \dfrac{F(0) + F(2)}{2}$ , adică numerele $F(0)$, $F(1)$ și $F(2)$ sunt în progresie aritmetică. Din ipoteză avem că aceste trei numere sunt și în progresie geometică, prin urmare $F(0) = F(1) = F(2)$. Este evident că funcția $F$ nu este injectivă.

**b)** Deoarece $F$ este o primitivă a funcției *f*, deducem că funcția $F$ este derivabilă pe intervalul $[0,2]$ și $F'(x)=f(x),\ \forall x\in[0,2]$. Cum $F(0)=F(1)=F(2)$, putem aplica teorema lui Rolle funcției $F$ pe intervalele $[0,1]$ și $[1,2]$. Rezultă că există $c_1\in(0,1)$ și $c_2\in(1,2)$ astfel încât $F'(c_1)=0$ și $F'(c_2)=0$, adică $f(c_1)=f(c_2)=0$. Altfel spus, ecuația $f(x)=0$ are cel puțin două soluții în intervalul $(0,2)$.

***Barem.***

| | |
|---|---|
| **a)** Arată că numerele $F(0), F(1)$ și $F(2)$ sunt în progresie aritmetică | 2 p |
| Demonstrează $F(0)=F(1)=F(2)$, deci $F$ nu este injectivă | 2 p |
| **b)** Aplică teorema lui Rolle funcției *F* pe intervalele $[0,1]$ și $[1,2]$ | 2 p |
| Finalizare | 1 p |

**3. a) (2p)** Demonstrați că există un interval deschis $I\subset\mathbb{R}$ astfel încât $x^{2020}+1<3x^{1010},\ \forall x\in I$.

**b) (5p)** Calculați $\displaystyle\int\frac{x^{2020}-1}{x\sqrt{-x^{4040}+2x^{3030}+x^{2020}+2x^{1010}-1}}dx,\ \ x\in I$.

*Lenuța Tomasciuc*

***Soluție.*** **a)** Notând $y=x^{1010}$ inegalitatea devine $y^2-3y+1<0 \Leftrightarrow y\in\left(\frac{3-\sqrt5}{2},\frac{3+\sqrt5}{2}\right)$.

Avem $\frac{3-\sqrt5}{2}<x^{1010}<\frac{3+\sqrt5}{2} \Leftrightarrow \sqrt[1010]{\frac{3-\sqrt5}{2}}<|x|<\sqrt[1010]{\frac{3+\sqrt5}{2}}$. Putem alege orice interval deschis $I$ inclus în mulțimea $\left(-\sqrt[1010]{\frac{3+\sqrt5}{2}},-\sqrt[1010]{\frac{3-\sqrt5}{2}}\right)\cup\left(\sqrt[1010]{\frac{3-\sqrt5}{2}},\sqrt[1010]{\frac{3+\sqrt5}{2}}\right)$.

**b)** Fie $J=\displaystyle\int\frac{x^{2020}-1}{x\sqrt{-x^{4040}+2x^{3030}+x^{2020}+2x^{1010}-1}}dx$. Să observăm că $0\notin I$ și că pentru $x\in I$ radicalul de la numitor are sens și este nenul. Scoțând factorul $x^{1010}$ de sub radical avem:

$$J=\frac{1}{1010}\cdot\int\left(\frac{1}{\sqrt{2\left(x^{1010}+\frac{1}{x^{1010}}\right)+1-\left(x^{2020}+\frac{1}{x^{2020}}\right)}}\cdot\left(1010x^{1009}-\frac{1010}{x^{1011}}\right)\right)dx$$

Dacă notăm $u(x)=x^{1010}+\frac{1}{x^{1010}}-1$, avem $u'(x)=1010x^{1009}-\frac{1010}{x^{1011}}$, iar integrala devine:

$$J=\frac{1}{1010}\cdot\int\frac{u'(x)}{\sqrt{4-u^2(x)}}dx=\frac{1}{1010}\arcsin\frac{u(x)}{2}+C.$$

***Barem.***

| | |
|---|---|
| **a)** Notând $y=x^{1010}$, obține $y\in\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2},\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$ | 1 p |
| Finalizare | 1 p |
| **b)** $J=\frac{1}{1010}\cdot\int\left(\frac{1}{\sqrt{2\left(x^{1010}+\frac{1}{x^{1010}}\right)+1-\left(x^{2020}+\frac{1}{x^{2020}}\right)}}\cdot\left(1010x^{1009}-\frac{1010}{x^{1011}}\right)\right)dx$ | 2 p |
| Finalizare | 3 p |

**4.** Fie $p$ și $q$ două numere prime diferite și $(G,\cdot)$ un grup necomutativ cu $pq$ elemente.

**a) (3p)** Arătați că $Z(G)=\{e\}$.

**b) (4p)** Să se demonstreze că $G$ conține două elemente de același ordin care nu comută.

*Am notat cu e elementul neutru din G și cu $Z(G)$ centrul grupului G, adică mulțimea* $Z(G)=\{y\in G/\ xy=yx,\ \forall x\in G\}$.

*Marian Andronache*

***Soluție:*** **a)** $G$ nu conține elemente de ordin $pq$ (în caz contrar ar fi grup ciclic, deci comutativ!)
Dacă $\exists a\in Z(G)$, $a\neq e$, atunci ord($a$) = $p$ sau ord($a$) = $q$. Să presupunem, de exemplu, ord($a$) =$p$. Conform teoremei lui Cauchy, $\exists b\in G$ cu ord($b$) = $q$. Cum $ab=ba$ rezultă că ord($ab$) = $pq$, absurd!

În concluzie, $Z(G)$ conține doar elementul neutru, adică $Z(G)=\{e\}$.

**b)** Presupunem că orice două elemente de același ordin comută.

Atunci $H_p=\{x\in G/x^p=e\}$ și $H_q=\{x\in G/x^q=e\}$ sunt subgrupuri în *G*. Cum ord$(H_p)$ divide ord$(G)$, rezultă că $H_p$ are *p* elemente (adică în *G* sunt $p-1$ elemente de ordin *p*). Analog se arată că $H_q$ are *q* elemente.

Cum $G=H_p\cup H_q$ și $H_p\cap H_q=\{e\}$ obținem $pq=p+q-1$, de unde $(p-1)(q-1)=0$, absurd! În concluzie, grupul *G* conține două elemente de același ordin care nu comută.

***Barem.***

| | |
|---|---|
| **a)** Argumentează că *G* nu conține elemente de ordin $pq$ | 1 p |
| Finalizare | 2 p |
| **b)** În ipoteza că orice două elemente de același ordin comută, $H_p$ este subgrup în *G* | 1 p |
| Demonstrează că $H_p$ are *p* elemente | 1 p |
| Finalizare | 2 p |

***Notă: Orice altă soluţie corectă se va puncta corespunzător.***