

Olimpiada Națională de Matematică- etapa locală
15 februarie 2015-PITEȘTI
Clasa a VI-a

SUBIECTE:

1. Fie a și b numere naturale mai mici decât 100, $a < b$. Aflați cele două numere știind că c.m.m.d.c. al lor este număr prim, de 15 ori mai mic decât c.m.m.m.c. al aceluiași numere.

2.a) Arătați că $\frac{3}{n(n+3)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+3}$, $n \in \mathbb{N}^*$;

b) Calculați suma $s = \frac{7}{1 \cdot 4} + \frac{31}{4 \cdot 7} + \frac{73}{7 \cdot 10} + \dots + \frac{9703}{97 \cdot 100}$.

c) Demonstrați că $\frac{1}{15} < \frac{1}{4^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{10^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < \frac{1}{3}$

3. Se dau unghiurile neadiacente suplementare $\angle AOB$ și $\angle AOC$. Măsura suplementului $\angle AOC$ reprezintă jumătate din măsura complementului $\angle AOB$.

a) Calculați $m(\angle AOB)$;

b) Dacă $[OD]$ este bisectoarea $\angle AOB$ și $[OE]$ este bisectoarea $\angle AOC$, calculați $m(\angle DOE)$;

c) Dacă $[OM]$ este o semidreaptă inclusă în exteriorul $\angle AOC$, $m(\angle AOM) = 90^\circ$ și $[ON]$ este bisectoarea $\angle COM$, demonstrați că punctele B, O, N sunt coliniare.

4. Spunem despre o mulțime de numere naturale că are proprietatea P dacă orice element al ei are exact 4 divizori.

a) Scrieți mulțimea cu proprietatea P formată din cele mai mici patru numere naturale de trei cifre.

b) Fie A o mulțime cu proprietatea P astfel încât $8 \in A$. Arătați că, orice elemente ar avea mulțimea A suma divizorilor acestor elemente nu poate fi 2014.

(Gazeta Matematică nr.11/2014)

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii

Fiecare subiect este notat cu 7 puncte

Timp de lucru 2 ore.

Olimpiada Națională de Matematică- etapa locală

15 februarie 2015-PITEȘTI

Clasa a VI-a

BAREM de CORECTARE si NOTARE:

1. Dacă notăm $(a, b) = p$, $p = \text{nr. prim}$, atunci $a = p \cdot x$, $b = p \cdot y$, $(x, y) = 1$ și $x < y$. (1p)
 $[a, b] = pxy$. Din $[a, b] = 15 \cdot (a, b) \Rightarrow pxy = 15p \Rightarrow x \cdot y = 15$. (1p)
 Deoarece $(x, y) = 1$ și $x < y$ rezultă $x = 1, y = 15$ sau $x = 3, y = 5$. (1p)
 Cazul I. Pentru $x = 1, y = 15 \Rightarrow a = p, b = 15p$, $p \in \{2, 3, 5\}$, obținem soluțiile
 $(a, b) \in \{(2, 30), (3, 45), (5, 75)\}$. (2p)
 Cazul II. Pentru $x = 3, y = 5 \Rightarrow a = 3p, b = 5p$, $p \in \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$, obținem
 soluțiile $(a, b) \in \{(6, 10), (9, 15), (15, 25), (21, 35), (33, 55), (39, 65), (51, 85), (57, 95)\}$ (2p)

2. a)
$$\frac{3}{n(n+3)} = \frac{(n+3)-n}{n(n+3)} = \frac{(n+3)}{n(n+3)} - \frac{n}{n(n+3)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+3}$$
 (2p)

b)
$$s = 1 + \frac{3}{1 \cdot 4} + 1 + \frac{3}{4 \cdot 7} + 1 + \frac{3}{7 \cdot 10} + \dots + 1 + \frac{3}{97 \cdot 100} =$$
 (1p)

$$= 33 + \frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{97} - \frac{1}{100} = 33 + \frac{99}{100} = 33 \frac{99}{100}$$
 (1p)

c)
$$\frac{1}{15} < \frac{1}{4^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{10^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < \frac{1}{3} \cdot 3 \Leftrightarrow \frac{1}{5} < \frac{3}{4^2} + \frac{3}{7^2} + \frac{3}{10^2} + \dots + \frac{3}{100^2} < 1$$
 (1p)

$$\frac{3}{4^2} + \frac{3}{7^2} + \frac{3}{10^2} + \dots + \frac{3}{100^2} < \frac{3}{1 \cdot 4} + \frac{3}{4 \cdot 7} + \frac{3}{7 \cdot 10} + \dots + \frac{3}{97 \cdot 100} =$$

$$= \frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{97} - \frac{1}{100} < 1$$
 (1p)

$$\frac{3}{4^2} + \frac{3}{7^2} + \frac{3}{10^2} + \dots + \frac{3}{100^2} > \frac{3}{4 \cdot 7} + \frac{3}{7 \cdot 10} + \frac{3}{10 \cdot 13} + \dots + \frac{3}{100 \cdot 103} =$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \frac{1}{10} - \frac{1}{13} + \dots + \frac{1}{100} - \frac{1}{103} = \frac{1}{4} - \frac{1}{103} = \frac{99}{412} > \frac{1}{5}$$
 (1p)

3. a) $m(\angle AOB) = 30^\circ$ (2p)

b) $m(\angle DOE) = 60^\circ$ (2p)

c) Demonstrează că $m(\angle BON) = 180^\circ \Rightarrow B, O, N$ coliniare. (3p)

4. a) $M = \{106, 111, 115, 118\}$

(2p)

b) Fie $x \in A$ și $x = d_1^{\alpha_1} \cdot d_2^{\alpha_2} \cdot d_3^{\alpha_3} \cdot \dots$ descompunerea în factori primi. Deoarece x are 4 divizori avem relația $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)(\alpha_3 + 1) \dots = 4$.

(1p)

Cazul I. $\alpha_1 + 1 = 4 \quad \alpha_1 = 3$

$$\alpha_2 + 1 = 1 \Rightarrow \alpha_2 = 0 \Rightarrow x = d_1^3 = d^3$$

(1p)

$$\alpha_3 + 1 = 1 \quad \alpha_3 = 0$$

.....

Cazul II. $\alpha_1 + 1 = 2 \quad \alpha_1 = 1$

$$\alpha_2 + 1 = 2 \Rightarrow \alpha_2 = 1 \Rightarrow x = d_1 \cdot d_2$$

(1p)

$$\alpha_3 + 1 = 1 \quad \alpha_3 = 0$$

.....

Notăm $s(x)$ suma divizorilor nr. $x \Rightarrow s(8) = 1 + 2 + 4 + 8 = 15$

Dacă $x \in A$, $x \neq 8 \Rightarrow x = d^3$, d nr. prim diferit de 2 sau $x = d_1 \cdot d_2$ unde d_1, d_2 sunt numere prime.

Pentru $x = d^3 \Rightarrow s(x) = 1 + d + d^2 + d^3 = (1 + d)(1 + d^2) = \text{nr. par.}$

(1p)

Pentru $x = d_1 \cdot d_2 \Rightarrow s(x) = 1 + d_1 + d_2 + d_1 \cdot d_2 = (1 + d_1)(1 + d_2) = \text{nr. par.}$

Suma divizorilor elementelor mulțimii A este nr. impar, deci este diferită de 2014.

(1p)

Observație: Dacă elevul precizează că $x = d^3$ sau $x = d_1 \cdot d_2$ unde d, d_1, d_2 sunt numere prime și nu demonstrează, se acordă 1p.

Notă:

Orice altă soluție corectă se punctează corespunzător.