



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală – Constanța, 17.02.2019

Clasa a IX-a

Barem

SUBIECTUL 1

Vom demonstra prin inducție matematică:

Verificare pentru $n=1$ 1p

Presupunem că $2^{2k-1} - (-2)^{k-1} - 1 \div 9$ și demonstrăm că $2^{2k+1} - (-2)^k - 1 \div 9$

$2^{2k+1} - (-2)^k - 1 = 2^{2k-1} \cdot 2^2 + 2 \cdot (-2)^{k-1} - 1 = 4 \cdot 2^{2k-1} + 2(2^{2k-1} - 1 - M_9) - 1 = 3 \cdot (2^{2k} - 1) - M_9$ 3p

Se demonstrează prin inducție că $2^{2k} - 1 \div 3$ (sau $4^k - 1 = M_3 + 1 - 1 = M_3$) 3p

SUBIECTUL 2

a) $na - 1 < [na] < na$ pentru că $a \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$. Cum $a > 1 \Rightarrow n - 1 < n - \frac{1}{a} < \frac{[na]}{a} < n \Rightarrow \left[\frac{[na]}{a} \right] = n - 1$

$nb - 1 < [nb] < nb$ pentru că $b \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$. Cum $b < -1 \Rightarrow n + 1 > n - \frac{1}{b} > \frac{[nb]}{b} > n \Rightarrow \left[\frac{[nb]}{b} \right] = n$

..... 3p

b) Dacă $a > 1$ atunci $\left[\frac{[n \cdot a]}{a} \right] = n - 1$ și dacă $a > 1 \Rightarrow -a < -1 \Rightarrow \left[\frac{[-n \cdot a]}{-a} \right] = n$

Deci $\left[\frac{[n \cdot a]}{a} \right] - \left[\frac{[-n \cdot a]}{-a} \right] = -1$

Dacă $a < -1$ atunci $\left[\frac{[n \cdot a]}{a} \right] = n$ și dacă $a < -1 \Rightarrow -a > 1$ atunci $\Rightarrow \left[\frac{[-n \cdot a]}{-a} \right] = n - 1$

Deci $\left[\frac{[n \cdot a]}{a} \right] - \left[\frac{[-n \cdot a]}{-a} \right] = 1$

Așadar $A_n = \{-1, 1\}$ 2p

Dacă $a > 1 \Rightarrow -na - 1 < [-na] < -na \Rightarrow -n - 1 < -n - \frac{1}{a} < \frac{[-na]}{a} < -n \Rightarrow \left[\frac{[-na]}{a} \right] = -n - 1$ deci

$\left[\frac{[n \cdot a]}{a} \right] + \left[\frac{[-n \cdot a]}{a} \right] = -2$

Dacă $a < -1 \Rightarrow -na - 1 < [-na] < -na \Rightarrow -n + 1 > -n - \frac{1}{a} > \frac{[-na]}{a} > -n \Rightarrow \left[\frac{[-na]}{a} \right] = -n$ deci

$\left[\frac{[n \cdot a]}{a} \right] + \left[\frac{[-n \cdot a]}{a} \right] = 0$

Așadar $B_n = \{0, 2\}$ 2p

SUBIECTUL 3

a) Fie $a+b+c=S$

$$3(a^2+b^2+c^2) \geq (a+b+c)^2 \Rightarrow 3S \geq S^2 \dots\dots\dots 2p$$

$$3S \geq S^2 \Rightarrow S(3-S) \leq 0 \Rightarrow S \in [0, 3] \dots\dots\dots 1p$$

b) $\frac{a(a-b)}{b^2} + \frac{b(b-c)}{c^2} + \frac{c(c-a)}{a^2} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 = \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \dots\dots\dots 1p$

Din (a) aplicat pentru $\frac{a}{b}, \frac{b}{c}$ și $\frac{c}{a} \Rightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \leq 3 \dots\dots\dots 1p$

Dar $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3\sqrt[3]{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a}} = 3 \dots\dots\dots 1p$

În concluzie $a=b=c \dots\dots\dots 1p$

SUBIECTUL 4

Fie D mijlocul segmentului AC

$$a \cdot \overrightarrow{PA} + b \cdot \overrightarrow{PB} + a \cdot \overrightarrow{PC} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC} = -\frac{b}{a} \overrightarrow{PB} \Rightarrow \overrightarrow{PD} = -\frac{b}{2a} \overrightarrow{PB} \Rightarrow P \in BD \dots\dots\dots 3p$$

Fie E pe AB astfel încât CE este bisectoarea unghiului C

$$\overrightarrow{PE} = \frac{a}{a+b} \overrightarrow{PA} + \frac{b}{a+b} \overrightarrow{PB} \dots\dots\dots 2p$$

Folosind relația inițială, deducem $\overrightarrow{PE} = -\frac{a}{a+b} \overrightarrow{PC} \Rightarrow P \in CE \dots\dots\dots 2p$

Notă. Orice altă rezolvare corectă primește punctajul maxim.