



Olimpiada Națională de Matematică 2018 Etapă locală – Iași, 1 februarie 2018

CLASA A XI-A

Problema 1.

Se consideră șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ definit prin: $x_1 = \frac{1}{2}$, iar $x_{n+1} = \frac{x_n^5 + 3x_n}{4}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Arătați că șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este convergent și determinați-i limita.

b) Demonstrați că $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+2}}{x_n} = \frac{9}{16}$.

Problema 2.

Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

a) Arătați că matricea A este inversabilă.

b) Dacă B este inversa matricei A , demonstrați că

$$B^n = 2^n C_n^0 I_3 - 2^{n-1} C_n^1 A + 2^{n-2} C_n^2 A^2 - \dots + (-1)^n C_n^n A^n.$$

Problema 3.

Se consideră funcția $f: \mathcal{M}_3(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, $f(X) = X^3$. Demonstrați că funcția f nu este nici injectivă, nici surjectivă.

Problema 4.

Fie $f: [0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ o funcție descrescătoare cu proprietatea că există un număr real strict pozitiv a astfel încât $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x+a)}{f(x)} = 1$. Demonstrați că $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x+b)}{f(x)} = 1$, oricare ar fi numărul real b din intervalul $(a, +\infty)$.

Gazeta Matematică 11/2017, Supliment

Timp de lucru: 3 ore

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte