



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală – Constanța, 17.02.2019

Clasa a IX-a

SUBIECTUL 1

Arătați că pentru orice număr natural nenul n , numărul $2^{2n-1} - (-2)^{n-1} - 1$ se divide cu 9.

Supliment G.M.B.

SUBIECTUL 2

Fie $n \in \mathbf{N}^*$.

a) Să se arate că $\left[\frac{[n \cdot a]}{a} \right] = n - 1$, pentru orice $a \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$, $a > 1$ și $\left[\frac{[n \cdot b]}{b} \right] = n$, pentru orice

$b \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$, $b < -1$.

b) Determinați mulțimile

$$A_n = \left\{ \left[\frac{[n \cdot a]}{a} \right] - \left[\frac{[-n \cdot a]}{-a} \right] \mid a \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}, |a| > 1 \right\} \text{ și } B_n = \left\{ \left[\frac{[n \cdot a]}{a} \right] + \left[\frac{[-n \cdot a]}{a} \right] \mid a \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}, |a| > 1 \right\}.$$

S-a notat cu $[x]$, partea întreagă a numărului real x .

Gheorghe Andrei

SUBIECTUL 3

a) Fie $a, b, c \in \mathbf{R}$ astfel încât $a^2 + b^2 + c^2 = a + b + c$. Arătați că $0 \leq a + b + c \leq 3$.

b) Fie $a, b, c \in (0, +\infty)$ astfel încât $\frac{a(a-b)}{b^2} + \frac{b(b-c)}{c^2} + \frac{c(c-a)}{a^2} = 0$. Arătați că $a = b = c$.

Nelu Chichirim

SUBIECTUL 4

În planul triunghiului ABC se consideră punctul P astfel încât $a \cdot \overrightarrow{PA} + b \cdot \overrightarrow{PB} + a \cdot \overrightarrow{PC} = \vec{0}$ unde s-a notat $a = BC$, $b = AC$. Să se arate că P este intersecția dintre mediana din B și bisectoarea interioară a unghiului C .

Cătălin Zîrnă

Notă:

Timp de lucru: 3 ore.

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect se notează de la 0 la 7.

Nu se acordă puncte din oficiu.