

## OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

– ETAPA LOCALĂ, 7.02.2026–

Clasa a XII-a

## SUBIECTUL 1 (22,5p)

Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$  și legea de compoziție,

$$x * y = x\sqrt{y^2 + 1} + y\sqrt{x^2 + 1}, \text{ pentru orice } x, y \in \mathbb{R}.$$

5,5p a) Arătați că funcția  $f$  este bijectivă.10p b) Demonstrați că  $f(x * y) = f(x) + f(y)$  pentru orice  $x, y \in \mathbb{R}$ .7p c) Arătați că legea de compoziție " $*$ " este asociativă.

## SUBIECTUL 2 (22,5p)

Se consideră mulțimea  $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix}, a^2 - 3b^2 = 1, a, b \in \mathbb{Z} \right\}$ .11,5p a) Demonstrați că  $G$  este parte stabilă a lui  $M_2(\mathbb{R})$  în raport cu înmulțirea.11p b) Demonstrați că  $(G, \cdot)$  este grup cu o infinitate de elemente.

## SUBIECTUL 3 (22,5p)

7,5p a) Arătați că  $\ln(1 + x) \leq x, \forall x \in (-1, \infty)$ .15p b) Demonstrați că  $\int_1^2 x \ln(1 + e^{-x^2}) dx < \frac{e^3 - 1}{2e^4}$ .

SUPLIMENTUL GAZETA MATEMATICĂ

## SUBIECTUL 4 (22,5p)

Se consideră funcția  $f: [2026, 2027] \rightarrow \mathbb{R}$ , dată de

$$f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3) \dots (x - 2025).$$

11,5p a) Calculați  $\int_{2026}^{2027} \frac{f'(x)}{f(x)} dx$ .11p b) Calculați  $\int_{2026}^{2027} \frac{f''(x)f(x) - (f'(x))^2}{f^2(x)} dx$ .

Notă: Timp de lucru 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.