



MINISTERUL
EDUCAȚIEI ȘI
CERCETĂRII



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală

08.02.2025

Clasa a XII-a

1. Se consideră mulțimea $M = (-\infty, 1)$. Pentru fiecare pereche $(x, y) \in M \times M$ notăm $x * y = \frac{2024 - xy}{2025 - x - y}$.

a) Arătați că funcția $(x, y) \rightarrow x * y$ definește o lege de compoziție pe M .

b) Demonstrați că legea de compoziție “*” este comutativă și asociativă, dar nu are element neutru.

2. Se consideră funcțiile $f, F: (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\sin 7x}{\sin x}$ și

$F(x) = x + \sin 2x + \frac{1}{2} \sin 4x + \frac{1}{3} \sin 6x$. Arătați $\int f(x) dx = F(x) + C$.

3. a) Fie $(G, \cdot)$ un grup comutativ cu elementul neutru e și $a \in G, a \neq e, a$ element de ordinul n al grupului G . Arătați că oricare ar fi o funcție $f: G \rightarrow G$, funcția $h: G \rightarrow G, h(x) = f(x) \cdot f(ax) \cdot \dots \cdot f(a^{n-1}x)$ nu este injectivă.

b) Să se determine toate automorfismele grupului $(\mathbb{Z}, +)$.

4. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow (1, \infty)$ o funcție derivabilă, iar F este o primitivă a funcției care verifică relația: $F(x) = f^2(x) + 2025 \cdot f(x) + x, (\forall) x \in \mathbb{R}$.

a) Să se studieze monotonia funcției f .

b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) + x \cdot f'(x)}{x}$.

Notă:

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect se notează cu 7 puncte;
- Timp de lucru: 3 ore.