**OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ**

**ETAPA LOCALĂ**

**SUCEAVA, 16 februarie 2013**

**BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE**
**CLASA a XI-a**

1. Fie $A, B, C$ trei matrice pătratice de ordin $n$, $n \geq 2$, cu elemente din mulţimea numerelor reale, care satisfac egalitatea $ABC + A + B + C = AB + AC + BC$. Arătaţi că matricea $A$ este inversabilă dacă și numai dacă matricea $BC - B - C$ este inversabilă.

*Anca Andrei, Suceava*

***Soluție.***

$ABC + A + B + C = AB + AC + BC \Leftrightarrow (A - I_n)(B - I_n)(C - I_n) = -I_n \Rightarrow \det(A - I_n) \neq 0$.

Pe de altă parte $ABC + A + B + C = AB + AC + BC \Rightarrow (A - I_n)(BC - B - C) = -A$, de unde deducem că $\det(A - I_n) \cdot \det(BC - B - C) = (-1)^n \det A$. Cum $\det(A - I_n) \neq 0$ rezultă că $\det A \neq 0$ dacă și numai dacă $\det(BC - B - C) \neq 0$.

***Barem.***

| | |
|---|---|
| Obține $(A - I_n)(B - I_n)(C - I_n) = -I_n$ | 2 p |
| Deduce $\det(A - I_n) \neq 0$ | 1 p |
| Obţine $(A - I_n)(BC - B - C) = -A$ | 2 p |
| Deduce $\det(A - I_n) \cdot \det(BC - B - C) = (-1)^n \det A$ | 1 p |
| Finalizare | 1 p |

2. a) Aflați valoarea determinantului $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 8 & 4 \\ 10 & 7 & 13 & 8 \\ 9 & 8 & 43 & 5 \\ 91 & 12 & 48 & 85 \end{vmatrix}$.

*(***)*

b) Notăm cu $a, b, c$ lungimile laturilor $BC, AC, AB$ ale triunghiului $ABC$. Arătați că valoarea determinantului $\Delta = \begin{vmatrix} -a & a - 2c\cos B & a \\ b & -b & b - 2a\cos C \\ c - 2b\cos A & c & -c \end{vmatrix}$ este zero.

*Supliment, G.M. 11/2012*

***Soluție.***

a) $$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 8 & 4 \\ 10 & 7 & 13 & 8 \\ 9 & 8 & 43 & 5 \\ 91 & 12 & 48 & 85 \end{vmatrix} \overset{C_1 - C_4}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 & 4 \\ 2 & 7 & 13 & 8 \\ 4 & 8 & 43 & 5 \\ 6 & 12 & 48 & 85 \end{vmatrix} \underset{\substack{C_3 - 8C_1 \\ C_4 - 4C_1}}{\overset{C_2 - 2C_1}{=}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -3 & 0 \\ 4 & 0 & 11 & -11 \\ 6 & 0 & 0 & 61 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 0 & 11 & -11 \\ 0 & 0 & 61 \end{vmatrix} =$$

$= 1 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 61 = 2013$

b) Înmulțind prima linie a lui $\Delta$ cu $a$, a doua cu $b$ și a treia cu $c$ obținem:

$$abc \cdot \Delta = \begin{vmatrix} -a^2 & a^2 - 2ac\cos B & a^2 \\ b^2 & -b^2 & b^2 - 2ab\cos C \\ c^2 - 2bc\cos A & c^2 & -c^2 \end{vmatrix}.$$

Adunând primele două linii la a treia găsim:

$$abc\cdot\Delta=\begin{vmatrix}-a^2 & a^2-2ac\cos B & a^2\\ b^2 & -b^2 & b^2-2ab\cos C\\ b^2+c^2-2bc\cos A-a^2 & a^2+c^2-2ac\cos B-b^2 & a^2+b^2-2ab\cos C-c^2\end{vmatrix}.$$

Dar $b^2+c^2-2bc\cos A=a^2, a^2+c^2-2ac\cos B=b^2, a^2+b^2-2ab\cos C=c^2$ (din teorema cosinusului). Rezultă $abc\cdot\Delta=\begin{vmatrix}-a^2 & a^2-2ac\cos B & a^2\\ b^2 & -b^2 & b^2-2ab\cos C\\ 0 & 0 & 0\end{vmatrix}=0,$ de unde $\Delta=0.$

***Barem.***

| | |
|---|---|
| Găsește că valoarea determinantului este 2013 | 3 p |
| Scrie teorema cosinusului | 1 p |
| Obține $abc\cdot\Delta=\begin{vmatrix}-a^2 & a^2-2ac\cos B & a^2\\ b^2 & -b^2 & b^2-2ab\cos C\\ c^2-2bc\cos A & c^2 & -c^2\end{vmatrix}$ | 2 p |
| Finalizare | 1 p |

3. Fie $f:\mathbb{R}\to(0,\infty)$ o funcție surjectivă și crescătoare.
   a) Arătați că $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$.
   b) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(1)+f^2(2)+f^3(3)+\ldots+f^n(n)}{f^n(n)}$.

*Dan Popescu, Suceava*

***Soluție.***

a) Arătăm că pentru orice $\varepsilon>0$ există $\delta_\varepsilon>0$ astfel încât $f(x)>\varepsilon, \forall x\in(\delta_\varepsilon,\infty)$. Fie $\varepsilon>0$ arbitrar. Din ipoteza de surjectivitate există $x_\varepsilon$ astfel încât $f(x_\varepsilon)=\varepsilon+1>\varepsilon$. Notăm cu $\delta_\varepsilon=\max(1,x_\varepsilon)\ge 1>0$ și fie $x\in(\delta_\varepsilon,\infty)$ oarecare. Atunci $x\ge x_\varepsilon$ și cum *f* este crescătoare deducem că $f(x)\ge f(x_\varepsilon)>\varepsilon$. În concluzie, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$.

b) Notăm cu $x_n=\dfrac{f(1)+f^2(2)+f^3(3)+\ldots+f^n(n)}{f^n(n)}$. Observăm că $x_n\ge\dfrac{f^n(n)}{f^n(n)}=1$ și

$$1\le x_n\le\frac{f(n)+f^2(n)+f^3(n)+\ldots+f^n(n)}{f^n(n)}=\frac{f(n)\cdot\left(1+f(n)+f^2(n)+\ldots+f^{n-1}(n)\right)}{f^n(n)}=$$

$$=\frac{f(n)}{f(n)-1}\cdot\frac{f^n(n)-1}{f^n(n)}=\frac{1}{1-\frac{1}{f(n)}}\cdot\left(1-\frac{1}{f^n(n)}\right).$$ Ținând cont că $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)=\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ (cf. a)) deducem că $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1-\frac{1}{f(n)}}\cdot\left(1-\dfrac{1}{f^n(n)}\right)=1$. Rezultă din lema cleștelui că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=1$.

***Barem.***

| | |
|---|---|
| Arată că $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ | 3 p |
| Obține $x_n\ge 1$, unde $x_n=\dfrac{f(1)+f^2(2)+f^3(3)+\ldots+f^n(n)}{f^n(n)}$ | 1 p |

| | |
|---|---|
| Obţine $x_n \le \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{f(n)}} \cdot \left(1-\dfrac{1}{f^n(n)}\right)$ | 2 p |
| Finalizare | 1 p |

4. Fie $M$ o mulţime infinită de numere reale cu proprietatea că pentru orice submulțime finită $S \subset M$ este îndeplinită condiția $\sum_{x \in S} |x| \ge (\operatorname{card} S)^2$, unde $|x|$ reprezintă modulul numărului real $x$, iar $\operatorname{card} S$ reprezintă numărul de elemente ale mulțimii $S$.
   a) Arătați că există un șir $(a_n)_{n\ge1}$ cu elemente din $M$ astfel încât $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty$.
   b) Arătați că mulțimea $M$ este numărabilă.

*Marius Marchitan, Suceava*

***<u>Soluție.</u>***

a) Presupunem că există $k \in \mathbb{N}^*$ astfel ca $M \cap ((-\infty, -k] \cup [k, \infty)) = \varnothing$. Deducem că $M \subset (-k, k)$. Cum $M$ este infinită, putem alege o submulțime cu $k$ elemente $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ a lui $M$. Atunci $\sum_{x\in S} |x| = |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_k| < k \cdot k = (\operatorname{card} S)^2$, ceea ce contrazice ipoteza. Rezultă că presupunerea este falsă, deci $M \cap ((-\infty, -n] \cup [n, \infty)) \ne \varnothing, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Putem alege pentru fiecare $n \ge 1$ un element $a_n \in M \cap ((-\infty, -n] \cup [n, \infty))$. Observăm că $|a_n| \ge n, \forall n \ge 1$, deci $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty$.

b) Fie $M_n = M \cap (-n, n), n \ge 1$. Presupunem că există $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\operatorname{card} M_k \ge k$. Putem alege o submulțime $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \subset M_k \subset M$. Atunci $\sum_{x\in S} |x| = |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_k| < k \cdot k = (\operatorname{card} S)^2$, ceea ce contrazice ipoteza. Rezultă că presupunerea este falsă, deci $\operatorname{card} M_n < n, \forall n \ge 1$. Prin urmare, am găsit, pentru fiecare $n \ge 1$, submulțimile $M_n \subset M$, finite. Evident $\bigcup_{n\ge1} M_n \subset M$. De asemenea, pentru orice $x \in M$, există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $|x| < n$ (spre exemplu $n = [|x|] + 1$), adică $x \in M_n$. Deducem că și $M \subset \bigcup_{n\ge1} M_n$, de unde $M = \bigcup_{n\ge1} M_n$. Cum $M$ este o reuniune numărabilă de mulțimi finite, rezultă că $M$ este numărabilă.

***<u>Barem.</u>***

| | |
|---|---|
| Arată că $M \cap ((-\infty, -n] \cup [n, \infty)) \ne \varnothing, \forall n \in \mathbb{N}^*$ | 2 p |
| Arată existența unui șir $(a_n)_{n\ge1} \subset M$ cu $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty$ | 1 p |
| Arată că $\operatorname{card} M_n < n, \forall n \ge 1$, unde $M_n = M \cap (-n, n), n \ge 1$ | 2 p |
| Arată că $M = \bigcup_{n\ge1} M_n$ | 1 p |
| Finalizare | 1 p |

*Notă:*
*Orice altă soluţie corectă se va puncta corespunzător.*