

BAREM DE CORECTARE
OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
 ETAPA LOCALĂ - 19 februarie 2017

Clasa a XII - a

SUBIECTUL I (7p)

Fie $\varepsilon = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ și legea "*" definită pe C prin $z_1 * z_2 = z_1 z_2 + \varepsilon z_1 + \varepsilon z_2 - 1$.

- Demonstrați că $(C - \{\varepsilon\}, *)$ este grup comutativ.
- Fie A punctul de afix $-\varepsilon$ și H mulțimea afixelor punctelor din planul complex situate pe cercul cu centrul în A și rază 1. Arătați că H este subgrup al grupului de la a).

Soluție:

a) Se arata ca $z_1 * z_2 = (z_1 + \varepsilon)(z_2 + \varepsilon) - \varepsilon \dots\dots\dots(1p)$

Se arata ca $(C - \{\varepsilon\}, *)$ este parte stabila $\dots\dots\dots(1p)$

Se verifica celelalte axiome ale grupului $\dots\dots\dots(2p)$

b) Se deduce că $H = \{z \in C / |z + \varepsilon| = 1\} \dots\dots\dots(1p)$

Se arată că $\forall z_1, z_2 \in H \Rightarrow z_1 * z_2 \in H \dots\dots\dots(1p)$

Se arată că $\forall z \in H \Rightarrow z' \in H \dots\dots\dots(1p)$

SUBIECTUL II (7p)

Fie $G = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} / a, b \in C, A^{2017} = I_2 \right\}$.

- Demonstrați că G este parte stabilă a lui $M_2(C)$ în raport cu înmulțirea matricelor.
- Demonstrați că $(G, \cdot)$ este grup abelian.
- Câte elemente are grupul $(G, \cdot)$.

Soluție:

a) Arată că $A_1 \cdot A_2 = \begin{pmatrix} a_1 a_2 & 0 \\ 0 & b_1 b_2 \end{pmatrix} = A_2 \cdot A_1$ și $(A_1 \cdot A_2)^{2017} = (A_1)^{2017} \cdot (A_2)^{2017} = I_2 \dots\dots(1p)$

b) Demonstrează că $(G, \cdot)$ este grup $\dots\dots\dots(3p)$

c) $A^{2017} = \begin{pmatrix} a^{2017} & 0 \\ 0 & b^{2017} \end{pmatrix} = I_2 \dots\dots\dots(1p)$

$a^{2017} = 1 \Rightarrow a \in U_{2017} \dots\dots\dots(1p)$

G are 2017^2 elemente $\dots\dots\dots(1p)$

SUBIECTUL III (7p)

- Calculați $\int (x+1)^2 e^{\frac{x-1}{x}} dx, x \in (0, \infty)$.

b) Calculați $\int \frac{x^2+1}{x^4+1} dx, x \in \mathbb{R}.$

Soluție:

a) $\int (x+1)^2 e^{\frac{x-1}{x}} dx = \int (e^{\frac{x-1}{x}})' \cdot x^2 dx + \int 2xe^{\frac{x-1}{x}} dx = e^{\frac{x-1}{x}} \cdot x^2 + C \dots\dots\dots(3p)$

b) $\int \frac{x^2+1}{x^4+1} dx = \int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}} dx = \int \frac{\left(x-\frac{1}{x}\right)'}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctg \frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}} + C \dots\dots\dots(2p)$

O primitiva pe $\mathbb{R}$ va fi $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \arctg \frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{2\sqrt{2}}, x < 0 \\ 0, x = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \arctg \frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{2\sqrt{2}}, x > 0 \end{cases} \dots\dots\dots(2p)$

SUBIECTUL IV (7p)

Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_0^x \frac{1}{2+\cos t} dt.$

Soluție:

Evident f este periodică de perioadă 2π și $\int_0^{n2\pi} f(x) dx = n \int_0^{2\pi} f(x) dx$

$\frac{\int_0^x f(x) dx}{x} = \frac{\int_0^{n_x} f(x) dx + \int_{n_x}^x f(x) dx}{n_x \cdot 2\pi + r_x} = \frac{n_x \cdot \int_0^{2\pi} f(x) dx + \int_0^{r_x} f(x) dx}{n_x \cdot 2\pi + r_x} \rightarrow \frac{\int_0^{2\pi} f(x) dx}{2\pi} \dots\dots\dots(3p)$

Cu substitutia $tg \frac{x}{2} = t$ se calculeaza o primitiva a lui f pe intervalul $[0, \pi]$ și apoi pe $(\pi, 2\pi]$

$F(x) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{3}} \arctg \frac{tg \frac{x}{2}}{\sqrt{3}}, x \in [0, \pi) \\ \frac{\pi}{\sqrt{3}}, x = \pi \\ \frac{2}{\sqrt{3}} \arctg \frac{tg \frac{x}{2}}{\sqrt{3}} + \frac{2\pi}{\sqrt{3}}, x \in (\pi, 2\pi] \end{cases}$ de unde integrala va fi $F(2\pi) - F(0) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \dots\dots\dots(3p)$

Finalizare $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{3}} \dots\dots\dots(1p)$